Agrégation Analyse (F. Rouvière) **2.10.01**

USAGES DE LA CONVERGENCE UNIFORME

1. L'exponentielle. L'exponentielle étant définie par la série entière habituelle, montrer que

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

pour tout nombre complexe z. [On pourra appliquer la formule du binôme.]

2. Produits infinis.

a. Soit $(u_n(x))$ une suite de fonctions définies sur un ensemble X, à valeurs complexes. On suppose que *la série* $\sum_1^\infty u_n(x)$ *converge normalement* sur X. Montrer que *le produit infini* $\prod_1^\infty (1 + u_n(x))$ *converge uniformément sur* X, c'est-à-dire que la suite de fonctions

$$P_N(x) = \prod_{n=1}^{N} (1 + u_n(x))$$

converge uniformément sur X vers une limite $P(x)$ quand $N \to \infty$.
[On pourra majorer $|P_N(x) - P_{N-1}(x)|$.]

b. On suppose de plus que $1 + u_n(x) \neq 0$ pour tous $n \geq 1$, $x \in X$. Montrer que $P(x) \neq 0$ pour tout x.
[On pourra appliquer **a** au produit $Q(x) = \prod(1 + v_n(x))$, avec $1 + v_n(x) = (1 + u_n(x))^{-1}$.]

c. On suppose de plus que X est un intervalle de $\mathbb{R}$, que $1 + u_n$ est strictement positive et dérivable sur X, et que la série $\sum_n u_n'(x)/\left(1 + u_n(x)\right)$ converge uniformément sur X. Montrer que $P(x)$ est dérivable sur X et que

$$\frac{P'}{P}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'}{1 + u_n}(x) \ , \ x \in X \ .$$

3. Développement d'Euler de $\sin z$**.** Soit z un nombre complexe quelconque.

a. Montrer que

$$\sin z = \lim_{k\to\infty} P_k(z) \ , \text{ avec } P_k(z) = \frac{1}{2i} \left[\left(1 + \frac{iz}{2k}\right)^{2k} - \left(1 - \frac{iz}{2k}\right)^{2k} \right] \ .$$

b. Factoriser P_k et en déduire l'expression

$$\sin z = z \lim_{k\to\infty} \prod_{n=1}^{k-1} \left(1 - a_n(k)\, z^2\right) \ ,$$

où $a_n(k)$ est un coefficient que l'on explicitera.

c. En déduire, à l'aide de **2.a**, le développement d'Euler

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right) \ .$$

d. En déduire, à l'aide de **2.c**, que

$$\cot x = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 - x^2} \ , \ 0 < x < \pi \ .$$

Références. Pour **1** et **3** : Valiron, *Théorie des fonctions*, p.40-42 et 56.
Pour **2** : Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Théorème 15.4.