Agrégation Analyse (F. Rouvière) **30.10.01**

SÉRIES DE FOURIER

1. Développements eulériens. On donne $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
a. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique égale à $\cos \alpha x$ pour $x \in]-\pi, \pi]$.
b. En déduire les égalités, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$,

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - n\pi)^2} \ .$$

2. Cas d'une fonction lipschitzienne. Soit f une fonction 2π-périodique et k-lipschitzienne, i.e.

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. On note $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier.
a. Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2 \frac{dx}{2\pi} = 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \sin^2 nh \ .$$

b. En déduire pour $h > 0$ l'inégalité

$$\sum_{|n|\leq\pi/2h} n^2 |c_n|^2 \leq \frac{k^2\pi^2}{4} \ .$$

c. Montrer enfin que f st somme de sa série de Fourier.
[On pourra majorer $\sum |c_n|$.]

3. Formule sommatoire de Poisson. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(x) = O(1/x^2)$ et $f'(x) = O(1/x^2)$ lorsque $x \to \pm\infty$. On veut montrer l'égalité

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \ , \qquad (*)$$

où

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi tx} dx \ , \ t \in \mathbb{R} \ ,$$

est la *transformée de Fourier* de f. Pour cela on développera en série de Fourier la fonction $\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x+k)$, de classe C^1 et 1-périodique (en justifiant tous les calculs!).
Exemple. Expliciter (*) pour $f(x) = e^{-ax^2}$, où $a > 0$ est une constante.

Références.
1. Moisan, Vernotte et Tosel, *Suites et séries de fonctions*, p.156, ou Gourdon, *Analyse*, p.260.
2. Moisan, Vernotte et Tosel, p.166, ou Gourdon, p.264 pour l'extension aux fonctions höldériennes.
3. Gourdon, p.269, ou Chambert-Loir & C°, *Analyse 1*, p.99, ou Zuily et Queffélec, *Eléments d'analyse pour l'agrégation*, p.93.