SÉRIES ENTIÈRES

1. Rayon de convergence.
a. On suppose $a_n > 0$ pour tout $n \geq 0$ et $\lim_{n\to\infty} (a_{n+2}/a_n) = \ell$. Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum_0^\infty a_n z^n$?
b. Même question si $a_{2p} > 0$, $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geq 0$ et $\lim_{p\to\infty} (a_{2p+2}/a_{2p}) = \ell$.

2. Sommation. Calculer $\sum_{n=0}^\infty z^{3n}/(3n)!$.

3. Comportement asymptotique au bord.
a. On donne deux séries entières $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, de rayon R, et $g(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$, de rayon 1. On suppose
$b_n > 0$ pour tout n, $\sum_0^\infty b_n$ divergente et $a_n \sim b_n$ lorsque $n \to \infty$.
Montrer que $R = 1$ et que

$$\sum_0^\infty a_n x^n \sim \sum_0^\infty b_n x^n \text{ quand } x \to 1 \ , \ x < 1 \ .$$

b. *Exemple 1.* Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose $a_n \sim n^p$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que

$$\sum_0^\infty a_n x^n \sim \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} \text{ quand } x \to 1 \ , \ x < 1 \ .$$

Peut-on étendre ce résultat à un exposant $p > 0$ non entier ?
c. *Exemple 2.* Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 t}} \sim -\frac{1}{2} \ln(1-x) \text{ quand } x \to 1 \ , \ x < 1 \ .$$

[On pourra vérifier d'abord que l'intégrale égale $\frac{2}{\pi} \sum_0^\infty I_{2n}^2 x^{2n}$, où I_n est l'intégrale de Wallis $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \ dt$.]

4. Série génératrice et dénombrement. On note $p_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, p_n le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.
a. Montrer que $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k p_k$ et que $p_n \leq n!$
b. Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{p_n}{n!} x^n \ .$$

Montrer que le rayon de convergence de cette série est au moins égal à 1.
Former une équation différentielle vérifiée par f, et en déduire une expression de f.
c. À l'aide de **b** donner une expression de p_n comme somme d'une série.

Références.
2. Moisan, Vernotte et Tosel, *Suites et séries de fonctions*, p. 79.
3. Gourdon, *Analyse*, p.243 ; Chambert-Loir & C°, *Analyse 1*, ex. 6-4.
4. Moisan, Vernotte et Tosel p. 94 ; Pommellet, *Analyse*, p. 230.