Agrégation Analyse (F. Rouvière) **3.11.98**

SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

1. Une série trigonométrique qui n'est pas de Fourier

a. Démontrer le *lemme de Fatou* pour les séries à termes positifs :

$$\sum_{n\geq 0}\left(\lim_{p\to\infty}\inf a_{n,p}\right) \leq \lim_{p\to\infty}\inf\left(\sum_{n\geq 0} a_{n,p}\right) .$$

[On pourra étudier d'abord le cas d'une somme finie $\sum_{n=0}^{N}$.]
Donner un exemple d'inégalité stricte.

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction *continue* $2\pi-$*périodique* sur $\mathbb{R}$, et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier. Pour $p \geq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$ on note

$$a_{n,p} = \left(1 - \frac{|n|}{p}\right) c_n \text{ si } |n| < p \ , \ a_{n,p} = 0 \text{ si } |n| \geq p \ .$$

b. Vérifier que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n,p} = \sigma_p(0)$ (somme de Fejér de f, calculée à l'origine).
c. On suppose que f a tous ses coefficients $c_n \geq 0$. Déduire de **a** et **b** que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ (i.e. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n < \infty$).
d. Montrer que *la série trigonométrique* (convergente)

$$\sum_{n\geq 2} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

n'est pas la série de Fourier d'une fonction $L^2(0, 2\pi)$, *ni même* $L^1(0, 2\pi)$.
[S'il existait $\varphi \in L^1(0, 2\pi)$ admettant cette série de Fourier, montrer que le résultat de **c** s'appliquerait à la fonction $f(x) = C - \int_0^x \varphi(t)dt$, où C est une constante convenablement choisie ; on vérifiera que $c_n(f) = ic_n(\varphi)/n$ pour $n \neq 0$.]

2. Sur la convergence des séries trigonométriques

On donne deux suites réelles (a_n) et (b_n), $n \geq 1$, et une partie A de $\mathbb{R}$ de mesure finie $m(A) > 0$. On choisit $r_n \geq 0$ et $\theta_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_n \cos nx + b_n \sin nx = r_n \cos(nx + \theta_n)$.
a. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \cos^2(nx + \theta_n)\, dx = \frac{1}{2} m(A) .$$

[Linéariser, et appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue.]
b. On suppose que $(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, pour tout $x \in A$. Montrer que $a_n \to 0$ et $b_n \to 0$ (*théorème de Cantor-Lebesgue*).
[Raisonner par l'absurde en supposant que r_n ne tend pas vers 0, utiliser **a** et le théorème de convergence dominée.]
c. On suppose maintenant que $\sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ converge absolument pour tout $x \in A$. Montrer que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$ (*théorème de Lusin-Denjoy*).
[Pour cela, on supposera d'abord que la fonction $f(x) = \sum_{n\geq 1} r_n \cos^2(nx + \theta_n)$ est bornée sur A, et on considèrera $\int_A f(x)\, dx$; puis on se ramènera au cas précédent en raisonnant sur les $A_k = \{x \in A : f(x) \leq k\}$.]

Références. 1 : voir Zuily et Queffélec, p.76, 117 et 131 ; **2.b** : voir Chambert-Loir et al., *Analyse 1*, p.100 ou Titchmarsh, *The theory of functions*, p.428 ; **2.c** : George, *Exercices et problèmes d'intégration*, p.99.