Agrégation Analyse (F. Rouvière) **6.12.00**

EXERCICES SUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES

1. Cauchy-Riemann. Soit $\Omega =]-\pi, \pi[\times\mathbb{R}$, considéré comme ouvert de $\mathbb{C}$. Trouver f, holomorphe dans Ω, telle que

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{\sin x}{\cos x + \cosh y} \ , \ z = x + iy \in \Omega \ .$$

2. Formules de Cauchy. Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, holomorphe dans le disque $|z| < 1$, telle que $|f(z)| \leq 1/(1-|z|)$ pour $|z| < 1$. Montrer que $|a_n| < (n+1)e$ pour tout n.

3. Résidus. Calculer l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx$.
[On pourra utiliser le chemin suivant : aller de $\varepsilon > 0$ à $R > \varepsilon$ sur $\mathbb{R}$, parcourir le cercle de centre 0 et de rayon R, puis aller de R à ε sur $\mathbb{R}$, et parcourir le cercle de centre 0 et de rayon ε.]

4. Cotangente et sommation de séries.
a. Montrer que la fonction $\pi \cot \pi z$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$. Trouver ses pôles et ses résidus.
b. Soit γ_n le carré de sommets $\pm\left(n+\frac{1}{2}\right) \pm i\left(n+\frac{1}{2}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $|\pi \cot \pi z| \leq M$ pour $n \geq 0$ et $z \in \gamma_n$.
c. Soit $f(z) = P(z)/Q(z)$ une fraction rationnelle dont les pôles $a_1, \ldots, a_k$ sont simples, non entiers, de résidus $r_1, \ldots, r_k$. On suppose $\deg Q \geq \deg P + 2$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $|f(z)| \leq C|z|^{-2}$ pour $|z|$ assez grand. En déduire que $\int_{\gamma_n} f(z) \cot \pi z \, dz$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.
d. En déduire l'égalité $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = -\sum_{j=1}^{k} \pi r_j \cot \pi a_j$.
Exemple : calculer $\sum_1^\infty (a + bn^2)^{-1}$ pour $a, b > 0$.

5. Aire et transformation holomorphe. Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, holomorphe dans le disque unité ouvert D. On suppose que f est un difféomorphisme (holomorphe) de D sur l'ouvert $f(D)$ [il suffit pour cela que f soit injective sur D].
Pour $r < 1$ on note $A(r)$ l'aire de l'image par f du disque $|z| \leq r$.
a. Montrer que

$$A(r) = \int\int_{|z|\leq r} |f'(z)|^2 \, dxdy = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n} \ .$$

b. En déduire l'inégalité $A(r) \geq \pi r^2 |f'(0)|^2$. Montrer que f conserve les aires si et seulement si c'est un déplacement.

Références.

1. Tauvel, *Exercices d'analyse complexe*, Masson 1994, p.13.
2. Tauvel, p.17. **3.** Tauvel, p.126 ou 136. **4.** Tauvel, p.93.
5. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*, Hermann, p.110.