Agrégation Analyse (F. Rouvière) **19.11.02**

EXPONENTIELLE ET LOGARITHME COMPLEXES

1. Vrai ou faux.
$\ln(z^2) = 2\ln z$? i^i est réel ? $\left(\sqrt{z}\right)^2 = \sqrt{z^2} = z$?

2. Sommation de séries trigonométriques.
a. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer par le théorème d'Abel que la série $\sum_{n=1}^{\infty}(z^n/n)$ converge uniformément dans le domaine $|z| \le 1$, $|z-1| \ge \varepsilon$.
b. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} \ , \ \theta \in \mathbb{R} \ .$$

c. En déduire que, pour tout entier $N \ge 1$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n\theta}{n} \right| \le 2\pi \ .$$

[On pourra étudier séparément les cas où $0 \le \theta \le 2\pi/N$ et $2\pi/N \le \theta \le \pi$.]

3. Indice d'un chemin fermé. Soient $I = [t_0, t_1]$ un intervalle compact, $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un chemin fermé de classe C^1 du plan complexe (avec $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$) et a un point de $\mathbb{C}$. On note

$$j(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2i\pi} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a} dt \ .$$

a. Montrer que ceci définit une fonction $a \mapsto j(\gamma, a)$ continue sur l'ouvert $\mathbb{C} \backslash \gamma(I)$, à valeurs entières, identiquement nulle hors d'un compact du plan.
[Pour montrer que $j(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$ on pourra raisonner sur la fonction

$$\varphi(t) = (\gamma(t) - a) \exp\left(- \int_{t_0}^{t} \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a} ds \right) \ .]$$

b. On suppose que le chemin γ ne rencontre pas une demi-droite issue de a. Montrer que $j(\gamma, a) = 0$.

4. Calcul d'intégrale. Soit

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right) \, d\theta \ .$$

a. Montrer que l'intégrale converge pour tout r réel. Comparer $I(r)$, $I(-r)$ et $I(1/r)$.
b. En s'aidant de $\ln(1 - re^{i\theta})$ et du théorème de Cauchy, calculer $I(r)$ pour $0 \le r < 1$, puis pour $r > 1$.
c. En déduire $I(\pm 1)$ par le théorème de convergence dominée.

Références.
2. Candelpergher, *Fonctions d'une variable complexe*, p.83 ; Arnaudiès et Fraysse, tome 3, *Compléments d'analyse*, p.99 ; Zuily et Queffélec, *Analyse*, p.43 et 77 ; Moisan, Vernotte et Tosel, p. 80.
3. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, 3ème édition, Théorème 10.10.
4. Gourdon, *Analyse*, p.181 (méthode différente de celle utilisée ici).