Agrégation Analyse (F. Rouvière) **15.3.05**

DE PHRAGMEN-LINDELÖF À HAUSDORFF-YOUNG

On rappelle le *principe du maximum* : soient Ω un ouvert *borné* connexe de $\mathbb{C}$, de frontière $\partial\Omega$, et f une fonction holomorphe dans Ω, continue sur son adhérence $\overline{\Omega}$; alors tout majorant de $|f|$ sur $\partial\Omega$ majore $|f|$ sur Ω.

1. Montrer que ce résultat peut être faux si Ω n'est pas borné (voir par exemple $f(z) = e^z$).

On va maintenant établir la forme suivante du **lemme de Phragmen-Lindelöf** : *le principe du maximum reste valable pour un ouvert de la forme* $\Omega =]a, b[\times\mathbb{R}$ (avec $a < b$), si on suppose de plus f *bornée* sur Ω.

On note M un majorant de $|f|$ sur $\partial\Omega$ et C un majorant de $|f|$ sur Ω.

2. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi_\varepsilon(z) = (1 + \varepsilon(z - a))^{-1}$. Montrer que, pour $z = x + iy \in \overline{\Omega}$,

$$|\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1 \text{ et } \varepsilon|y||\varphi_\varepsilon(z)| \leq 1 \ .$$

3. Conclure en appliquant le principe du maximum à $\varphi_\varepsilon f$ sur le rectangle $a < x < b$, $|y| < C/M\varepsilon$.

Application à l'inégalité de Hausdorff-Young : montrons que *si* f *est* 2π*-périodique sur* $\mathbb{R}$*, avec* $f \in L^p(0, 2\pi; dt/2\pi)$ *et* $1 \leq p \leq 2$*, on a l'inégalité*

$$\|c(f)\|_q \leq \|f\|_p \ ,$$

où $c(f)$ désigne la suite des coefficients de Fourier de f et $(1/p) + (1/q) = 1$.

4. Etablir l'inégalité pour $f \in L^p(0, 2\pi)$, $p = 1$ ou $p = 2$.

On suppose désormais $1 < p < 2$. Soit (a_n) une suite finie de nombres complexes telle que $\sum_n |a_n|^p = 1$, soit f une fonction en escalier sur $[0, 2\pi]$, telle que $\|f\|_p = 1$, et

$$g(z) = \sum_n |a_n|^{pz} \left(\frac{a_n}{|a_n|}\right) \int_0^{2\pi} |f(t)|^{pz} \left(\frac{f(t)}{|f(t)|}\right) e^{-int} \frac{dt}{2\pi} \ .$$

5. Montrer que $|g(z)| \leq 1$ pour $x = 1$ et pour $x = 1/2$, et que g est une fonction entière de $z = x + iy$.

[Pour majorer quand $x = 1/2$, on pourra utiliser les coefficients de Fourier de la fonction $\varphi(t) = |f(t)|^{pz}(f(t)/|f(t)|)$.]

6. Appliquer à g le lemme de Phragmen-Lindelöf sur l'ouvert $1/2 < x < 1$ de $\mathbb{C}$. En considérant $g(1/p)$ montrer que

$$\left|\sum_n a_n c_n(f)\right| \leq 1 \ .$$

7. En déduire l'inégalité de Hausdorff-Young pour f en escalier, puis pour toute $f \in L^p(0, 2\pi)$.

Référence. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, 3ème éd., Théorèmes 12.8 et 12.12.