Agrégation Analyse (F. Rouvière) **16.12.97**

INVERSION D'UNE FONCTION HOLOMORPHE

Soit f une fonction holomorphe au voisinage de l'origine, telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que

$$|z| = a \text{ entraîne } |f(z)| \geq b \ .$$

2. Soient

$$V = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| < a \text{ et } |f(z)| < b\}\ ,\ W = \{w \in \mathbb{C}\ ,\ |w| < b\}\ .$$

Montrer que f est une bijection de V sur W.

[Pour $w \in W$ donné, on pourra appliquer le théorème de Rouché à la fonction $z \mapsto f(z) - w$.]

3. Montrer que la fonction inverse f^{-1} est holomorphe sur W, et admet le développement en série entière (*formule d'inversion de Lagrange*) :

$$f^{-1}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n \ , \text{ avec } a_n = \frac{1}{2ni\pi}\int_\gamma \frac{dz}{(f(z))^n} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left(\frac{z}{f(z)}\right)^n_{z=0} \ ,$$

où γ est le cercle $|z| = a$ parcouru une fois dans le sens direct.

[On pourra appliquer le théorème des résidus à l'intégrale

$$\int_\gamma z\frac{f'(z)}{f(z) - w}dz \ ,$$

et développer en série entière $1/(f(z) - w)$.]

4. *Exemple.* On prend

$$f(z) = \frac{z}{1 + z^3} \ .$$

Expliciter les a_n et calculer le rayon de convergence de la série de Lagrange.

Références

L'exercice est tiré de Candelpergher, *Fonctions d'une variable complexe*, p.73-76.

On trouvera aussi la formule de Lagrange dans

Valiron, *Équations fonctionnelles*, p.96-99, ou Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, p.250.

Le résultat ci-dessus est local (au voisinage de l'origine). Un résultat global remarquablement simple est le suivant :

Soit f une fonction holomorphe et injective sur un ouvert connexe Ω du plan complexe. Alors f est un homéomorphisme de Ω sur l'ouvert $f(\Omega)$, et l'application réciproque f^{-1} est holomorphe sur $f(\Omega)$.

Pas besoin de supposer ici $f'(z) \neq 0$! Explication du mystère dans

Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques*, p.178, ou

Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Théorème 10.33.