Agrégation, oral d'Analyse (F. Rouvière) **15.10.02**

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

Quelques méthodes ? N'y en a-t-il pas autant que d'intégrales ? Elles sont nombreuses et diverses en tout cas, et il est périlleux de tenter d'en faire une liste exhaustive. Et, supposant établie cette liste, il est bien difficile de l'ordonner de manière cohérente, tant il est fréquent que l'on fasse appel à plusieurs méthodes entremêlées pour traiter un exercice.

La liste ci-dessous n'est qu'une tentative, que chacun(e) pourra compléter et réorganiser à son goût.

Méthodes exactes en une variable

1. à l'aide d'une primitive (obtenue souvent à l'aide de 3 et 4 ; exemple $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$ =?!)
2. par calcul direct de sommes de Riemann (ex. $\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos\theta+r^2)\,d\theta$)
3. par intégration par parties
4. par changement de variable
5. par récurrence (souvent à l'aide de 3 ; ex. l'étude de $I_n = \frac{1}{n!}\int_{-x}^{x}(x^2-t^2)^n e^t dt$ permet de montrer que e^x est irrationnel pour x rationnel non nul)
6. par théorèmes généraux sur les intégrales à paramètre (continuité, dérivation sous $\int$), quitte à introduire un paramètre s'il n'en figure aucun ! (ex. transformée de Fourier de $e^{-\pi x^2}$)
7. par développement en série et théorème $\int\sum = \sum\int$ (ex. $\int_0^1 x^x\,dx$, $\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\operatorname{sh} x}dx = \pi^2/2$)
8. à l'aide d'une intégrale double auxiliaire (ex. $\int_0^{\infty}(e^{-ax}-e^{-bx})dx/x = \ln(b/a)$)
9. par le théorème des résidus
10. par la théorie de l'intégrale de Fourier (formule d'inversion, formule de Plancherel)

Méthodes approchées en une variable

1. recherche d'un équivalent ou même d'un développement asymptotique, au voisinage d'une certaine valeur d'un paramètre (ex. $\int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2}\ln(1+x+x^2)\,dx$ pour $t\to+\infty$)
2. méthodes d'approximation numérique

En plusieurs variables

1. par théorème de Fubini pour se ramener à des intégrales simples
2. par changement de variables (suivi du th. de Fubini)

De là, tenter de définir un fil conducteur pour la leçon, autour d'un choix d'exemples. Préciser dans quel cadre on se place (intégrale de Riemann, de Riemann généralisée, ou de Lebesgue). Pour chaque exemple choisi, citer les méthodes en jeu.

Références

Cours : Gourdon (intégrale de Riemann), Lelong-Ferrand et Arnaudiès tome 4 (intégrales multiples), Faraut (intégrale de Lebesgue), Buchwalter (intégrale de Lebesgue), Cartan (variable complexe chapitre 3) ou Candelpergher chapitre 7 pour les résidus, ...
Exercices corrigés : Gourdon chapitres 3 et 5, Makarov & Cie chapitres 5 et 6 (très beau choix !), Chambert-Loir & Cie tome 1 chapitre 11, etc. etc.