INTÉGRALES À PARAMÈTRES

1. Asymptotique d'une primitive. Donner un développement asymptotique de la fonction $f(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ (appelée *logarithme intégral*) lorsque $x \to +\infty$.
[On pourra effectuer des intégrations par parties successives.]

2. Calcul d'intégrale par dérivation. Soit

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin tx}{t\,(t^2+1)} dt \; .$$

a. Montrer que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0, \infty[$, et que $f''(x) - f(x)$ est constant pour $x > 0$. [Pour f'' on pourra penser au théorème d'Abel.]
b. Expliciter $f(x)$ et $\int_0^\infty \frac{\cos tx}{t^2+1} dt$.

3. Sommation de Borel. Démontrer l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-t} \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{t^n}{n!} dt = \sum_{n=0}^\infty a_n$$

a. en supposant la convergence absolue de la série $\sum a_n$;
b. en supposant seulement la convergence de la série $\sum a_n$.
[Pour **b** on pourra établir d'abord l'égalité $\int_0^x e^{-t} f(t)\, dt = e^{-x} F(x)$, avec $f(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n \frac{t^n}{n!}$, $F(x) = \sum_{n=0}^\infty A_{n-1} \frac{x^n}{n!}$, $A_n = a_0 + \cdots + a_n$, $A_{-1} = 0$. Puis faire tendre x vers l'infini.]
c. Que peut-on dire si $a_n = z^n$?

4. Approximation par convolution. Soit (φ_n) une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, positives, telles que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\, dx = 1 \text{ et, pour tout } \alpha > 0, \int_{|x| \geq \alpha} \varphi_n(x)\, dx \to 0 \text{ si } n \to \infty \; .$$

a. Donner des exemples de suites (φ_n). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, tendant vers zéro à l'infini. Montrer que le produit de convolution

$$(\varphi_n * f)\,(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t)\, f(x-t)\, dt$$

est une fonction bornée et continue sur $\mathbb{R}$, qui tend vers f uniformément sur $\mathbb{R}$ quand $n \to \infty$.
b. On suppose f continue sur $\mathbb{R}$, identiquement nulle hors de $[0, 1]$, et

$$\varphi_n(x) = a_n \left(1 - x^2\right)^n \text{ si } |x| \leq 1 \text{ , } \varphi_n(x) = 0 \text{ sinon,}$$

où le facteur a_n est choisi pour que $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) dx = 1$. Montrer que $(\varphi_n * f)\,(x)$ est alors une fonction polynomiale de x pour $0 \leq x \leq 1$.
c. En déduire le **théorème d'approximation de Weierstrass** : *toute fonction continue sur un intervalle compact* $[a, b]$ *est limite uniforme sur* $[a, b]$ *d'une suite de polynômes.*
[On pourra se ramener à $[0, 1]$ par une transformation affine.]

Références. 1 : Gourdon, *Analyse*, p.170. **2** : Titchmarsh, *Theory of functions*, p.61 (non corrigé). **3** : Titchmarsh, p.47, ou Pommellet, *Analyse*, p.211. **4** : Gourdon, p.280, ou Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, p.157.