Agrégation Analyse (F. Rouvière) **8.10.03**

INTÉGRALES ET INÉGALITÉS

1. Encadrement. Pour n entier positif on considère $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$. En choisissant un bon encadrement de $1+x^2$ sur $[0,1]$, encadrer I_n et en déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini.

2. Intégrale et sommes de Riemann. Pour x réel, $x \neq \pm 1$, on considère

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos\theta + x^2\right) \, d\theta \ .$$

a. Calculer $I(x)$ comme limite de sommes de Riemann. On distinguera les cas $|x| < 1$ et $|x| > 1$.
b. Retrouver ce résultat en observant, par des changements de variable simples, que $2I(x) = I(x) + I(-x) = I(x^2)$ et en itérant cette relation.

3. Intégrales et irrationalité. Pour x et n positifs, n entier, on note

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n e^t \, dt \ .$$

a. Montrer que $|I_n(x)| \leq 2\frac{x^{2n+1}}{n!} e^x$.
b. Montrer par récurrence qu'il existe des polynômes $P_n, Q_n \in \mathbb{Z}[X]$, de degré n au plus, avec P_n impair et Q_n pair, tels que

$$I_n(x) = 2^{n+1}(P_n(x) \operatorname{ch} x + Q_n(x) \operatorname{sh} x) \ .$$

c. Déduire de **a** et **b** que e^x est irrationnel pour tout x rationnel non nul.
[On pourra raisonner par l'absurde.]

4. Inégalité de van der Corput. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un intervalle ouvert I. On suppose qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $f''(x) \geq \lambda$ pour tout $x \in I$. On veut montrer l'inégalité, pour tous $a, b \in I$,

$$\left| \int_a^b e^{if(x)} dx \right| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \ . \qquad (*)$$

a. Établir (*) lorsque $0 \leq b - a \leq \sqrt{2/\lambda}$.
b. Établir (*) lorsque $b - a > \sqrt{2/\lambda}$ et $f' \geq 0$ sur $[a,b]$. [On pourra partager l'intervalle par le point $a + \sqrt{2/\lambda}$, et intégrer par parties sur l'intervalle $\left[a + \sqrt{2/\lambda}, b\right]$.]
c. Établir (*) lorsque $b - a > \sqrt{2/\lambda}$ et $f' \leq 0$ sur $[a,b]$. [On pourra changer x en $-x$.]
d. Conclure. [On pourra partager $[a,b]$, si nécessaire, en deux intervalles sur lesquels f' garde un signe constant.]

Références

1. D'après un sujet du baccalauréat 1995...
2. Gourdon, *Analyse*, p.181.
3. Makarov & C°, *Selected problems in real analysis*, p.16 ; Hardy and Wright, *An introduction to the theory of numbers*, p.46.
4. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, p.116 ; Dieudonné, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, p.87 ; Chambert-Loir & C°, *Analyse I*, p.200.