Agrégation Analyse (F. Rouvière) **14.10.03**

INTÉGRALES IMPROPRES

1. a. Soit f une fonction continue, décroissante et positive sur $[0,\infty[$. On suppose la convergence de $\int_0^\infty f(x)\, dx$. Montrer que

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \lim_{t\to 0, t>0}\left(t\sum_{n=1}^\infty f(nt)\right) .$$

b. En déduire un équivalent de $\sum_{n=1}^\infty u^{n^2}$ lorsque u tend vers 1 par valeurs inférieures.

2. On rappelle la notation $\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment dérivable, telle que les intégrales $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx$ et $\int_{-\infty}^\infty |f''(x)|^2 dx$ soient convergentes. On veut montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^\infty |f'(x)|^2 dx$ est alors convergente, et que

$$\|f'\|_2^2 \le \|f\|_2 \|f''\|_2 .$$

a. Établir la convergence de $\int_{-\infty}^\infty |f(x)f''(x)|\, dx$.
b. En observant que $2ff' = (f^2)'$, montrer que, si $f(x)f'(x)$ tend vers une limite ℓ (finie ou infinie) lorsque x tend vers $\pm\infty$, alors nécessairement $\ell = 0$.
c. En observant que $f'^2 + ff'' = (ff')'$, montrer par l'absurde la convergence des intégrales $\int_0^\infty f'^2 dx$ et $\int_{-\infty}^0 f'^2 dx$.
d. Montrer que $\int_{-\infty}^\infty (f'^2 + ff'')\, dx = 0$ et conclure.

3. Calcul élémentaire de $I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$. Soit $S_n(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}$.
a. Vérifier que, pour $0 \le x < 2\pi$,

$$S_n(x) = \int_0^{x/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt - \frac{x}{2} .$$

b. Si f est continûment dérivable sur $[a,b]$, montrer que $\int_a^b f(t)\sin\lambda t\, dt \longrightarrow 0$ lorsque le réel λ tend vers $\pm\infty$. [On pourra intégrer par parties.]
c. Soit $f(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$. En observant que, si $\varphi(t)$ est C^∞, $\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}$ l'est aussi, montrer que f est indéfiniment dérivable sur $]-\pi,\pi[$. Vérifier l'égalité

$$S_n(x) = \int_0^{(2n+1)x/2} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{x}{2} + \int_0^{x/2} f(t)\sin(2n+1)t\, dt .$$

d. Déduire des questions précédentes l'égalité

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n} = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt - \frac{x}{2} \ , \ 0 < x < 2\pi \ ,$$

et la valeur de l'intégrale I.

Références.

1. Gourdon, *Analyse*, p.155. Voir aussi Chambert-Loir & C°, *Analyse 1*, p.193 pour une preuve géométrique de 1.b.
2. Leichtnam, *Exercices d'oral X et E.N.S., Analyse*, p.169 ; Gourdon, *Analyse*, p.177.
3. Titchmarsh, *Theory of functions*, p.42.