TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle *transformée de Laplace* de f l'intégrale

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty f(x) e^{-tx} dx \ ,$$

pour tout t réel tel que l'intégrale converge.

1.a. On suppose l'intégrale $\mathcal{L}f(t_0)$ absolument convergente pour un $t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{L}f(t)$ est bien définie pour $t \geq t_0$, et fonction continue de t sur $[t_0, \infty[$.
b. Montrer que le résultat de **a** reste valable si $\mathcal{L}f(t_0)$ est convergente (non absolument). [En intégrant par parties on pourra montrer que

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty F\left(\frac{u}{t - t_0}\right) e^{-u} du$$

pour $t > t_0$, avec $F(x) = \int_0^x f(y) e^{-t_0 y} dy$, et conclure par convergence dominée.]

2.a. Soit A (resp. C) l'ensemble des t tels que l'intégrale $\mathcal{L}f(t)$ converge absolument (resp. converge). Montrer que A et C sont vides, ou $\mathbb{R}$ entier, ou des demi-droites.
b. Déterminer A et C lorsque $f(x) = \exp(ie^x)$. [On pourra faire le changement $u = e^x$.]

3. *Injectivité de* $\mathcal{L}$. On suppose que $\mathcal{L}f(t_0)$ converge et que $\mathcal{L}f(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$.
a. Avec la notation de**1.b** montrer que $\int_0^\infty F(x) e^{-(t-t_0)x} dx = 0$ pour tout $t > t_0$.
b. En déduire que f est identiquement nulle. [On pourra faire le changement $u = e^{-x}$.]

4. Les fonctions f et g étant prolongées par 0 sur $]-\infty, 0[$, établir l'égalité

$$\mathcal{L}(f * g)(t) = \mathcal{L}f(t) \mathcal{L}g(t)$$

sous des hypothèses que l'on précisera.

5. D'après **1.b** la convergence de $\mathcal{L}f(0)$ entraîne $\lim \mathcal{L}f(t) = \mathcal{L}f(0)$ (limite lorsque $t \to 0$ à droite). Inversement, l'existence de $\lim_{t \to 0} \mathcal{L}f(t) = \ell$ entraîne-t-elle la convergence de $\mathcal{L}f(0)$ et l'égalité $\mathcal{L}f(0) = \ell$?
a. Montrer que c'est faux pour $f(x) = \sin x$.
b. Montrer que c'est vrai si de plus $f(x) = o(1/x)$ lorsque $x \to +\infty$.
[On pourra montrer que, pour $u > 0$,

$$\left| \int_0^u f(x) dx - \mathcal{L}f\left(\frac{1}{u}\right) \right| \leq \frac{1}{u} \int_0^u \frac{1 - e^{-x/u}}{x/u} |xf(x)| dx + \int_u^\infty e^{-x/u} |xf(x)| \frac{dx}{x},$$

puis faire tendre u vers l'infini.]

Références. Problème d'Analyse de l'agrégation 1991 (première partie), et aussi
Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses 1994, p.179, 197-199
Leichtnam, *Exercices corrigés de l'X et des E.N.S., Analyse*, Ellipses 2000, p.237.