Agrégation Analyse (F. Rouvière) **29.10.02**

ESPACES DE HILBERT

On note E un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ admettant une base hilbertienne dénombrable (e_k), muni du produit scalaire $(.,.)$ et de la norme $\|.\|$.

1. Distance à un sous-espace fermé. Dans l'espace de Hilbert réel $E = L^2(0,1;\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire usuel $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$, on note F le sous-espace formé des fonctions f telles que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.
a. Déterminer l'orthogonal de F dans E.
b. Calculer la distance à F de la fonction $\varphi(x) = e^x$.
c. Expliciter une base hilbertienne de E, et une de F.

2. Caractérisation des projecteurs orthogonaux. Soient F un sous-espace fermé de E, non réduit à zéro, et soit P une projection de E sur F, parallèlement à un sous-espace G de E. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
(i) P est la projection orthogonale sur F
(ii) $\|P\| = 1$
(iii) $(Px,x) \leq \|x\|^2$ pour tout $x \in E$
(pour $(iii) \Rightarrow (i)$, on pourra prendre $x = y + \lambda z$, avec $y \in F$ et z orthogonal à F).

3. Droite des moindres carrés. Étant donnés n points (x_i, y_i) du plan $\mathbb{R}^2$, avec des x_i non tous égaux entre eux, chercher le minimum, pour λ, μ réels, de l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \lambda x_i - \mu)^2 \ .$$

(On pourra raisonner dans l'espace hilbertien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.)

4. Convergence forte et convergence faible. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E *converge fortement vers* u si $\|u_n - u\|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On dit qu'elle *converge faiblement vers* u si le produit scalaire (u_n, x) tend vers (u,x) pour tout $x \in E$.
a. Montrer que la convergence forte entraîne la convergence faible.
b. Montrer que, si E est de dimension infinie, la suite (e_k) converge faiblement vers 0.
c. La réciproque de **a** est-elle vraie ?
d. On suppose que (u_n) converge faiblement vers u. Montrer que (u_n) converge fortement vers u si et seulement si $\|u_n\|$ tend vers $\|u\|$ (on pourra étudier $\|u_n - u\|^2$).

Références.
2. Zuily et Queffélec, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, p. 218
3. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, p. 357
4. Yosida, *Functional analysis*, p. 124 ; Gourdon, *Analyse*, p. 405.