Agrégation Analyse (F. Rouvière) **4.1.95**

OPÉRATEURS À TRACE

Soient E un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, $(\ ,\ )$ son produit scalaire et $A : E \to E$ un opérateur linéaire continu. On suppose que, pour une base hilbertienne (e_n) de E, on a

$$\sum_m \sum_n |(Ae_m, e_n)| < \infty \ .$$

1. Soit (e'_p) une autre base hilbertienne de E. En écrivant $e'_p = \sum_m c_{mp} e_m$, avec $c_{mp} = (e'_p, e_m)$, montrer que

$$\sum_p |c_{mp} c_{np}| \leq 1 \ , \ \sum_p c_{mp} \overline{c_{np}} = \delta_{mn}$$

(où δ_{mn} est le symbole de Kronecker).

2. En déduire l'égalité

$$\sum_p (Ae'_p, e'_p) = \sum_n (Ae_n, e_n) \ .$$

Ce nombre, indépendant de la base hilbertienne choisie, est noté $\operatorname{tr} A$. On dit alors que A est un *opérateur à trace*.

On considère désormais l'exemple suivant : $E = L^2(0, 2\pi)$, avec la mesure normalisée $dx/2\pi$, et $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$. Soit $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, 2π-périodique en chaque variable. On considère

$$Af(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(x, y) f(y) dy \ , \ f \in E \ .$$

3. Montrer que Af est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.

4. En majorant $|Af(x)|^2$ par Cauchy-Schwarz, montrer que $A : E \to E$ est un opérateur linéaire continu.

On admettra le développement suivant (donné par la théorie des séries de Fourier pour les fonctions de deux variables)

$$a(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{mn} e^{imx} e^{iny} \ ,$$

$$\text{avec } a_{mn} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(x, y) e^{-imx} e^{-iny} dx dy \ , \ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_{mn}| < \infty \ .$$

5. Montrer que A est un opérateur à trace.

6. Montrer que

$$\operatorname{tr} A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(x, x) \ dx \ .$$