Agrégation Analyse (F. Rouvière) **7.12.95**

L'ESPACE DE HARDY H^2

A. Soit D le disque $|z| < 1$ du plan complexe. Pour f holomorphe dans D, on note $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ et

$$M(r) = \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2} \quad , \; 0 \leq r < 1 \; .$$

1. Exprimer $M(r)$ au moyen des a_n (penser à l'égalité de Parseval). En déduire que $M(r)$ est fonction croissante de r sur $[0, 1[$.
2. Soit $\|f\| = \lim_{r \to 1} M(r)$. Montrer que

$$\|f\| = \left(\sum_0^\infty |a_n|^2 \right)^{1/2} \quad .$$

On note $H^2(D)$ (*espace de Hardy*) l'ensemble des f holomorphes dans D et telles que $\|f\| < \infty$.
3. Montrer que l'application $f \mapsto (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une bijection de $H^2(D)$ sur $\ell^2(\mathbb{N})$. En déduire que $H^2(D)$, muni de la norme $\|.\|$, est un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$.

B. On suppose f holomorphe dans D et injective.
1. Montrer que, pour $0 \leq r < 1$, l'image par f du disque $|z| \leq r$ a pour aire

$$A(r) = \int \int_{|z| \leq r} |f'(z)|^2 \; dxdy \; , \text{ avec } z = x + iy \; .$$

2. En s'inspirant de **A.1**, exprimer $A(r)$ au moyen des a_n. En déduire que

$$A(r) \geq \pi r^2 |f'(0)|^2 \; .$$

Quand y a-t-il égalité ?

Références.

Yosida, *Functional analysis*, p.41, 53.
Rudin, *Analyse réelle et complexe*, chapitre 17.
Cartan, *Fonctions analytiques*, p.110.