Agrégation Analyse (F. Rouvière) **29.3.99**

A. Étude d'un opérateur linéaire

Si E est un espace normé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) on note $L(E)$ l'espace des applications linéaires *continues* de E dans lui-même, et $GL(E)$ le groupe des éléments inversibles de $L(E)$ (i.e. $u \in L(E)$ et $u^{-1} \in L(E)$).

On prend ici $E = \ell^2$, espace de Hilbert des séries complexes de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$; on note $a = (1, 0, \ldots, 0, \ldots) \in E$. On définit l'opérateur $u : E \to E$ par

$$u(x) = y \text{ avec } y_o = 0,\ y_n = x_{n-1} \text{ si } n \geq 1 \ .$$

1. Montrer que $u \in L(E)$ est une isométrie, et déterminer son image $u(E)$.
2. On suppose que u est limite dans $L(E)$ d'une suite (u_k) d'éléments de $L(E)$. On note $\varepsilon_k = \|u - u_k\|$.

a. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$|a \cdot u_k(x)| \leq \frac{\varepsilon_k}{1 - \varepsilon_k} \|u_k(x)\| \ .$$

[On pourra écrire $u_k = (u_k - u) + u$.]

b. En déduire une contradiction si tous les u_k sont surjectifs. Ainsi $GL(E)$ n'est pas dense dans $L(E)$ (contrairement au cas où E est de dimension finie).

3. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est *valeur propre* de u si $u - \lambda I$ n'est pas injectif, et *valeur spectrale* si $u - \lambda I$ n'appartient pas à $GL(E)$.

a. Si $|\lambda| > 1$, montrer que $u - \lambda I$ est inversible. [S'inspirer de la série de Neumann.]
b. Si $|\lambda| \leq 1$, montrer que $u - \lambda I$ est injectif, mais que a n'appartient pas à son image.
c. En déduire les valeurs propres et les valeurs spectrales de u.

B. Norme quotient

Soit F un sous-espace vectoriel *fermé* d'un espace normé E (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $x \mapsto \overline{x} = x + F$ la projection canonique de E sur l'espace quotient E/F, et

$$\|\overline{x}\| = \inf_{v \in \overline{x}} \|v\| = \inf_{u \in F} \|x + u\| \ .$$

1. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E/F.
2. Si E est complet, montrer que E/F est complet. [Si $(\overline{x}_n)$ est de Cauchy dans E/F, on pourra choisir une suite extraite $(\overline{x}_{\varphi(n)})$ et un représentant $v_n \in \overline{x}_{\varphi(n+1)} - \overline{x}_{\varphi(n)}$ tels que $\|v_n\| \leq 2^{-n}$.]

Références. Pour **A** : Chambert-Loir & C°, tome 3, p.40 ; Dieudonné, *Éléments d'analyse*, tome 1, p.320-322. Pour **B** : Yosida, *Functional analysis*, p.59. Attention : Chambert-Loir & C°, tome 3, p.33, contient des *âneries* sur le sujet !