

Les cinq points de Lagrange

François Rouvière

8 janvier 2023

(version préliminaire*)

Introduction

Le problème des deux corps en Mécanique Céleste est l'étude du mouvement de deux corps massifs (étoiles, planètes,...) sous l'effet de la seule gravitation newtonienne. Ce problème est complètement intégrable : les équations différentielles de leurs mouvements peuvent être explicitement résolues, et conduisent notamment aux trois lois de Kepler.

Il n'en est plus de même du problème analogue avec trois corps ou plus, dont seuls quelques cas très particuliers peuvent être résolus exactement. C'est le cas des **configurations stationnaires**, solutions du problème des trois corps dans lesquelles leurs trois distances mutuelles ne varient pas au cours du temps. Dans son *Essai sur le problème des trois corps* [5], primé en 1772 par l'Académie Royale des Sciences de Paris, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) a montré que ce problème admettait exactement cinq solutions. Le troisième corps doit se trouver en l'un des points L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 , appelés désormais **points de Lagrange** (**Figure 1**).

Pour chacun des trois premiers L_1, L_2, L_3 , les trois corps sont alignés ; ces configurations avaient déjà été mises en évidence quelques années plus tôt, en 1767 [2], par Leonhard Euler (1707-1783). Pour chacun des deux derniers L_4, L_5 , découverts par Lagrange, les trois corps forment un triangle équilatéral.

« Cette recherche n'est à la vérité que de pure curiosité » écrivait Lagrange ([5] p. 230) à propos de ces jolies solutions du problème des trois corps. Mais de nombreux exemples ont été trouvés depuis, à commencer par les astéroïdes « troyens » situés au voisinage des points L_4 et L_5 du système Soleil-Jupiter. Le premier d'entre eux ne fut cependant découvert qu'en 1906 par l'astronome allemand Max Wolf ; baptisé Achille, il est à l'origine de l'épithète « troyens » affectée à tous les autres. Quant aux points L_1 et L_2 du système Soleil-Terre, leur proximité de la Terre incite à les utiliser pour y placer des satellites artificiels : L_1 est idéal pour une surveillance continue du Soleil ou de la Terre et, à l'opposé, L_2 pour une exploration du ciel profond.

Ces notes se composent de deux parties indépendantes.

Dans la partie I, on développe une approche simplifiée de la recherche des cinq points dans le cadre du **problème restreint des trois corps**, l'un d'entre eux étant supposé de masse assez petite pour ne pas perturber les deux autres. Dans

*Les figures seront ajoutées ultérieurement.



FIG. 1 – Les cinq points de Lagrange

ce cadre, on explique le calcul détaillé de la position des points de Lagrange et on discute leur stabilité.

Dans la partie II, on donne un aperçu de la méthode générale proposée par Lagrange dans son *Essai sur le problème des trois corps* [5], basée sur l'étude directe de leurs distances mutuelles. On retrouve ainsi, sans avoir besoin des hypothèses particulières du problème restreint, les cinq points mis en évidence dans la partie I.

Dans toute la suite, les lettres en caractères gras \mathbf{a} , \mathbf{b} ,... désignent des vecteurs de l'espace euclidien orienté \mathbb{R}^3 , $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ leur produit scalaire (canonique) et $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ leur produit vectoriel.

I. Problème restreint des trois corps

Dans cette première partie nous considérons le problème simplifié suivant :

Hypothèses

Deux corps M_1 et M_2 (de masses respectives m_1 et m_2) décrivent des orbites circulaires autour de O , centre de gravité du système M_1M_2 . Un troisième corps M est en mouvement dans le champ de gravitation des deux premiers, et sa masse m est supposée assez petite par rapport à m_1 et m_2 pour ne pas perturber le mouvement de M_1 et M_2 .

Insistons sur les deux hypothèses faites ici : d'une part le mouvement de (la planète) M_2 par rapport à (l'étoile) M_1 sera circulaire uniforme, cas particulier le plus simple d'une ellipse de Kepler décrite selon la loi des aires, d'autre part on négligera l'influence sur ce mouvement du petit corps M . L'étude de ce **problème restreint des trois corps** s'applique notamment au mouvement d'un satellite artificiel dans le champ du système Soleil-Terre, ou du système Terre-Lune, ou encore à celui d'un petit satellite d'une planète géante (système Soleil-Jupiter par exemple).

Au **paragraphe 1**, les conditions nécessaires pour une configuration stationnaire permettent de mettre en évidence les cinq points de Lagrange. Un développement limité, valable lorsque la masse de M_2 est petite par rapport à celle de M_1 , précise leurs positions. La réciproque est établie au **paragraphe 2** : chacun de ces points donne effectivement une configuration stationnaire du problème restreint des trois corps. Leur stabilité est discutée au **paragraphe 3** en linéarisant les équations différentielles du mouvement. Le **paragraphe 4** donne un aperçu de l'utilisation des points de Lagrange pour l'astronautique des satellites artificiels. Enfin l'**Annexe 1** détaille la preuve d'un lemme élémentaire d'algèbre linéaire utilisé dans l'étude de la stabilité.

Notations de la partie I (Figure 2). Dans l'espace euclidien orienté \mathbb{R}^3 on prend pour origine le barycentre O (centre de gravité) de M_1 et M_2 avec les masses m_1 et m_2 et on choisit un repère orthonormé direct $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ en rotation, tel que $\overrightarrow{M_1M_2} = R\mathbf{i}$ avec $R = M_1M_2 > 0$ (constant d'après les hypothèses) et que (\mathbf{i}, \mathbf{j}) soit une base orthonormée du plan de l'orbite de M_1 et M_2 . Ce plan est fixe et nous l'appellerons *plan horizontal*. Par rapport à un repère galiléen, le repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est animé d'un mouvement de *rotation uniforme* autour de l'axe vertical passant par O , de vitesse angulaire ω et de vecteur rotation (constant) $\vec{\omega} = \omega\mathbf{k}$. Si M est un point quelconque de l'espace, on note

$$\mathbf{r}_i := \overrightarrow{M_iM}, r_i := M_iM, \\ \alpha_i := \frac{m_i}{m_1 + m_2}$$

pour $i = 1, 2$, d'où $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ et, O étant le barycentre,

$$\mathbf{x} := \overrightarrow{OM} = \alpha_1\mathbf{r}_1 + \alpha_2\mathbf{r}_2 \\ \overrightarrow{OM_1} = -\alpha_2R\mathbf{i}, \overrightarrow{OM_2} = \alpha_1R\mathbf{i} \text{ avec } R = M_1M_2.$$

FIG. 2 – Problème restreint des trois corps.

Enfin G désigne la constante de la gravitation.

Pour le système $M_1 = \text{Soleil}$ et $M_2 = \text{Terre}$, le rapport des masses $\alpha_2 = m_2/(m_1 + m_2)$ est voisin de 3.10^{-6} . Comme la distance R vaut 150.10^6 km (environ), on a $OM_1 = \alpha_2 R \simeq 450$ km soit (environ) 6.10^{-4} fois le rayon du Soleil. Le centre de gravité du système Soleil-Terre est, comme on pouvait s'y attendre, presque confondu avec le centre du Soleil.

1 Étude élémentaire

Nous recherchons les configurations stationnaires du problème restreint, pour lesquelles les trois distances mutuelles r_1 , r_2 et R restent constantes. Cette recherche sera facilitée en raisonnant dans le repère en rotation.

Oublions dans un premier temps le troisième petit corps M . Du point de vue du repère en rotation $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, le point M_2 est en équilibre sous l'action de deux forces colinéaires : l'attraction de M_1 , d'intensité Gm_1m_2/R^2 d'après la loi de gravitation universelle de Newton, et la force centrifuge $m_2OM_2\omega^2 = m_2\alpha_1R\omega^2$. En égalant ces deux forces on obtient $Gm_1 = \alpha_1R^3\omega^2$. Même chose pour M_1 , d'où $Gm_2 = \alpha_2R^3\omega^2$ et, en additionnant,

$$G(m_1 + m_2) = R^3\omega^2 \quad (1)$$

puisque $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Cette égalité est la **troisième loi de Kepler** : si la masse m_2 d'une planète est petite devant la masse m_1 de son étoile, on a $m_1 + m_2 \simeq m_1$ et le produit $R^3\omega^2$ a sensiblement même valeur pour chacune des planètes qui gravitent autour de cette étoile. Si T est la période de révolution de la planète, on a $\omega = 2\pi/T$ et on voit ainsi que le carré de T est (à peu près) proportionnel au cube de sa distance R à l'étoile.

1.1 Condition nécessaire de configuration stationnaire

Supposons maintenant qu'il existe une configuration stationnaire à trois points M_1 , M_2 , M , ce dernier étant supposé de masse m négligeable devant m_1 et m_2 , de sorte qu'il ne perturbe pas le mouvement circulaire uniforme de M_1 et M_2 . Supposons de plus M immobile dans le repère en rotation $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, i.e. $\overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ avec x, y, z constants. Il doit alors être en équilibre sous l'action de trois forces : les attractions de M_1 et M_2 et la force «axifuge», horizontale car perpendiculaire au vecteur rotation $\vec{\omega}$ (**Figure 2**). La somme des deux attractions est égale à

$$-Gm \left(m_1 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + m_2 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right)$$

FIG. 3 – Les points de Lagrange L_4 et L_5 forment un triangle équilatéral avec M_1 et M_2 .

et, $\vec{\mathbf{r}}_1$ et $\vec{\mathbf{r}}_2$ ayant évidemment la même composante verticale z que \mathbf{x} , la projection sur l'axe vertical de la condition d'équilibre donne

$$\left(\frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3}\right)z = 0.$$

Par suite $z = 0$, ce qui signifie que M doit être dans le plan horizontal $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ de l'orbite de M_1 et M_2 . Dans ce plan, la condition d'équilibre «somme des attractions + force centrifuge = 0» s'écrit

$$-Gm \left(m_1 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + m_2 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) + m\omega^2 \mathbf{x} = 0.$$

D'après (1) on peut y remplacer ω^2 par $G(m_1 + m_2)/R^3$. Comme $(m_1 + m_2)\mathbf{x} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2$, la condition nécessaire de mouvement stationnaire devient alors

$$m_1 \left(1 - \frac{R^3}{r_1^3} \right) \mathbf{r}_1 + m_2 \left(1 - \frac{R^3}{r_2^3} \right) \mathbf{r}_2 = 0. \quad (2)$$

L'analyse de cette condition se scinde en deux cas.

1.2 Cas non aligné

Si M_1 , M_2 et M ne sont pas alignés, les vecteurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 ne sont pas colinéaires et, les masses m_i étant strictement positives, la condition (2) équivaut à $r_1 = r_2 = R$. Les points obtenus forment avec M_1 et M_2 un **triangle équilatéral** : $M_1M = M_2M = M_1M_2$; ce triangle est en rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de O . Le corps M doit se trouver en l'un des **deux points de Lagrange L_4 ou L_5** (**Figure 3**).

L'égalité $r_1 = r_2$ assure que les attractions exercées sur M par M_1 et M_2 sont dans le même rapport que leurs masses m_1 et m_2 . Leur résultante

$$-\frac{Gm}{r_1^3} (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) = -\frac{Gm}{r_1^3} (m_1 + m_2)\mathbf{x} = -\frac{R^3}{r_1^3} m\omega^2 \mathbf{x}$$

(grâce à (1)) est donc colinéaire à $\mathbf{x} = \overrightarrow{OM}$. L'égalité $r_1 = R$ assure ensuite que cette résultante équilibre exactement la force centrifuge $m\omega^2 \mathbf{x}$.

1.3 Cas aligné

On s'intéresse maintenant aux configurations stationnaires dans lesquelles les trois corps restent alignés. Pour motiver les calculs qui vont suivre, cherchons par exemple un point de Lagrange M (qui sera baptisé L_1 plus bas) du système $M_1 =$

FIG. 4 – Recherche de points de Lagrange alignés avec M_1 et M_2 : $\overrightarrow{M_1M_2} = R\mathbf{i}$, $\overrightarrow{M_2M} = uR\mathbf{i}$, $\overrightarrow{M_1M} = (1+u)R\mathbf{i}$.

Soleil, $M_2 =$ Terre, qui soit situé entre M_1 et M_2 . Comment M peut-il effectuer, comme la Terre, un tour en un an de manière à laisser inchangées les distances mutuelles ? La troisième loi de Kepler semble s’y opposer, d’après laquelle plus un corps est proche du Soleil, plus sa période de révolution est courte. Mais cette loi ne s’applique qu’au problème à deux corps M_1 et M . Ici l’attraction du troisième corps (la Terre) s’oppose à celle du premier (le Soleil) et, pour M , tout se passe comme si la masse du Soleil était légèrement plus faible. La position de M est déterminée par la condition que, en ce point, la force de gravitation du Soleil est équilibrée par la somme de la force centrifuge et de la gravitation de la Terre. L’attraction du Soleil en ce point étant $S = Gm_1m/r_1^2$ et celle de la Terre $T = Gm_2m/r_2^2$, le rapport T/S est égal à $(m_2/m_1)(r_1/r_2)^2$. Avec $m_2/m_1 = 3.10^{-6}$, $r_2 \simeq 1,5.10^6$ km et $r_1 = R - r_2 \simeq 148,5.10^6$ km pour le point $M = L_1$ (comme on le montrera en 1.4), on voit ainsi que l’attraction du Soleil est équilibrée à 3% par celle de la Terre et à 97% par la force centrifuge.

On peut caractériser les configurations cherchées par le paramètre p défini par $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{M_2M} = pR\mathbf{i}$, ce qui revient à prendre pour unité la distance $R = M_1M_2$ (appelée *unité astronomique* dans le cas du système Soleil-Terre) ; alors (**Figure 4**)

$$\mathbf{r}_1 = (1+p)R\mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_2 = pR\mathbf{i}. \quad (3)$$

Avec ces notations on a $r_1 = |1+p|R$, $r_2 = |p|R$ et l’équation (2) se transforme facilement en

$$f(1+p) + \mu f(p) = 0, \quad \text{avec } f(p) := p(1-|p|^{-3}) \quad \text{et } \mu := \frac{m_2}{m_1}. \quad (4)$$

Dans les applications le rapport μ des masses est (positif et) petit : environ 10^{-3} pour le système Soleil-Jupiter, 3.10^{-4} pour Soleil-Saturne et 3.10^{-6} pour Soleil-Terre. On s’attend donc à ce que les solutions p de (4) soient proches de celles de l’équation $f(1+p) = 0$, c’est-à-dire $(1+p)^3 = \pm 1$, d’où $p = 0$ (i.e. $M = M_2$) ou bien $p = -2$ (i.e. les points M et M_2 sont symétriques par rapport à M_1).

Voyons cela de plus près. Une étude graphique, en traçant les graphes de $f(1+p)$ et de $\mu f(p)$ avec μ petit, suggère que (4) admet trois solutions p , l’une légèrement supérieure à -2 , les deux autres proches de 0 et de signes opposés, ce qu’il est facile de démontrer. Pour cela soit

$$g(p) := f(1+p) + \mu f(p),$$

définie sauf pour $p = -1$ et $p = 0$. Comme $f(p) = p+p^{-2}$ pour $p < 0$ et $f(p) = p-p^{-2}$ pour $p > 0$, la dérivée $f'(p)$ est partout > 1 , donc $g'(p) > 1 + \mu > 1$ et g est strictement croissante sur chacun de ses intervalles de définition.

FIG. 5 – Les cinq points de Lagrange L_1, \dots, L_5 .

- Sur $] -\infty, -2]$, g croît de $-\infty$ à $g(-2) = -7\mu/4 < 0$: pas de solution sur cet intervalle.
- Sur $] -2, -1[$, g croît de $-7\mu/4 < 0$ à $+\infty$: il y a une solution sur cet intervalle. On note L_3 le point M ainsi obtenu.
- Sur $] -1, 0[$, g croît de $-\infty$ à $+\infty$: il y a une solution sur cet intervalle. On note L_1 le point M ainsi obtenu.
- Sur $] 0, 1[$, g croît de $-\infty$ à $g(1) = 7/4 > 0$: il y a une solution sur cet intervalle. On note L_2 le point M ainsi obtenu.
- Sur $] 1, \infty[$, g croît de $7/4$ à $+\infty$: pas de solution sur cet intervalle.

En résumé, on trouve ici **trois points de Lagrange L_1, L_2 et L_3 alignés avec M_1 et M_2 (Figure 5)**; ces points avaient été mis en évidence quelques années avant Lagrange par Leonhard Euler [2]. Leurs positions par rapport à M_1 et M_2 , indiquées sur la figure, seront précisées au paragraphe suivant. Enfin, on montrera au §2.2 que les cinq points obtenus donnent effectivement des solutions stationnaires du problème restreint des trois corps.

1.4 Précisions sur la position des points L_1, L_2, L_3

Les points L_4 et L_5 , sommets de triangles équilatéraux avec M_1 et M_2 , étant parfaitement connus (voir §1.2), il nous reste à préciser la position de L_1, L_2 et L_3 . L'équation (4) ne peut en général être résolue exactement ; nous donnerons seulement un développement limité des solutions selon les puissances du rapport des masses $\mu = m_2/m_1$, supposé petit. Reprenons pour cela les notations p (avec $\overline{M_2M} = p\mathbf{Ri}$) et $f(p) = p(1 - |p|^{-3})$. L'équation à résoudre est (4) :

$$f(1+p) + \mu f(p) = 0.$$

Nous avons vu que, pour $\mu > 0$, elle n'admet que trois solutions réelles p , comprises respectivement entre -1 et 0 (point L_1), entre 0 et 1 (point L_2) et entre -2 et -1 (point L_3).

Cas de L_1 et L_2 . On a ici $0 < |p| < 1$, donc $1+p > 0$ et l'équation s'écrit $(1+p) - (1+p)^{-2} + \mu(p \mp p^{-2}) = 0$ (où \pm est le signe de $p = \pm|p|$) soit encore, après multiplication par $p^2(1+p)^2$,

$$p^2(3p + 3p^2 + p^3) = \mu(1+p)^2(\pm 1 - p^3). \quad (5)$$

Si p est voisin de 0 on a ainsi (heuristiquement) $3p^3 \simeq \pm\mu$ d'où $p \simeq \pm(\mu/3)^{1/3}$. Pour reprendre le calcul de manière rigoureuse, ceci invite à remplacer μ par $\lambda := \mu^{1/3} > 0$ et p par q avec $p = \lambda q$. L'équation (5) devient, après simplification par λ^3 ,

$$F(q, \lambda) = 0 \text{ avec } F(q, \lambda) := 3q^3 + 3\lambda q^4 + \lambda^2 q^5 - (1 + \lambda q)^2 (\pm 1 - \lambda^3 q^3)$$

(où \pm est le signe de q). Pour $\lambda = 0$ ses solutions sont $q = \pm 3^{-1/3}$. Le théorème des fonctions implicites est maintenant applicable à F au voisinage de chacun des deux points $(q, \lambda) = (\pm 3^{-1/3}, 0)$, puisque $F(\pm 3^{-1/3}, 0) = 0$ et $(\partial F/\partial q)(\pm 3^{-1/3}, 0) = 3^{4/3} \neq 0$. Dans chacun de ces voisinages l'équation $F(q, \lambda) = 0$ définit q comme fonction implicite $q(\lambda)$, indéfiniment dérivable. En particulier $q(\lambda)$ admet un développement limité de la forme $q(\lambda) = q_0 + \lambda q_1 + O(\lambda^2)$, qui s'obtient aisément en dérivant $F(q(\lambda), \lambda) = 0$ par rapport à λ , en $\lambda = 0$, (ou, si l'on préfère, en y reportant l'expression de $q(\lambda)$ et identifiant). On obtient

$$\frac{\partial F}{\partial q}(q_0, 0)q_1 + \frac{\partial F}{\partial \lambda}(q_0, 0) = 9q_0^2 q_1 + 3q_0^4 \mp 2q_0 = 0,$$

et $q_0 = \pm 3^{-1/3}$ donne $q_1 = 3^{-5/3}$. En revenant à $p = \lambda q = \mu^{1/3} q$ on aboutit aux deux solutions

$$p_{\pm} = \pm \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + O(\mu) \text{ avec } \mu = m_2/m_1.$$

La position des points L_1 et L_2 est donnée par (3) : $\overline{M_2 L_1} = p_- R$ et $\overline{M_2 L_2} = p_+ R$ (mesures algébriques sur l'axe orienté par le vecteur \mathbf{i}).

Si on prend $\mu = m_2/m_1 = 3.10^{-6}$ pour le système Soleil-Terre on trouve ainsi, en ne gardant que les deux premiers termes, $p_{\pm} \simeq \pm \frac{1}{100} + \frac{1}{30\,000}$. Avec $R = 150.10^6$ km pour distance Terre-Soleil, le point L_1 est situé entre Terre et Soleil à $1,495.10^6$ km du centre de la Terre, et L_2 à $1,505.10^6$ km dans la direction opposée.

Cas de L_3 . On cherche ici la solution de (4) telle que $-2 < p < -1$. Après multiplication par $p^2(1+p)^2$ l'équation s'écrit :

$$p^2(1+(1+p)^3) + \mu(1+p)^2(1+p^3) = 0 \quad (6)$$

ou encore, en posant $p = -2 + q$,

$$12q - 24q^2 + \dots + q^5 + \mu(-7 + 26q + \dots + q^5) = 0.$$

Le théorème des fonctions implicites s'applique ici directement au voisinage du point $(q, \mu) = (0, 0)$ et conduit comme précédemment au développement limité

$$p = -2 + \frac{7}{12}\mu - \frac{7}{12}\mu^2 + O(\mu^3) \text{ avec } \mu = m_2/m_1,$$

d'où la position de L_3 : $\overline{M_2 L_3} = pR$, soit encore $\overline{M_1 L_3} = (1+p)R$.

Pour le système Soleil-Terre on trouve ainsi, en ne gardant que les deux premiers termes, $1+p \simeq -1 + 1,75.10^{-6}$ et la distance de L_3 au centre M_1 du Soleil est voisine de $(150.10^6 - 262)$ km. Cette distance n'étant que très légèrement inférieure à R , **le triangle $L_3 L_4 L_5$ est presque équilatéral**, de centre M_1 (**Figure 5**).

En résumé, la **position des points de Lagrange alignés avec M_1 et M_2** est (approximativement pour μ petit) donnée par les mesures algébriques

$$\overline{M_2 L_1} \simeq -R \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}, \overline{M_2 L_2} \simeq R \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}, \overline{M_1 L_3} \simeq -R \left(1 - \frac{7}{12}\mu\right)$$

$$\text{avec } R = \overline{M_1 M_2}, \mu = m_2/m_1.$$

Leurs positions par rapport au centre de gravité O s'en déduisent en ajoutant $\overline{OM_2} = R/(1+\mu) \simeq R$, respectivement $\overline{OM_1} = -R\mu/(1+\mu) \simeq -R\mu$.

2 Équation différentielle du mouvement

Nous étudions maintenant, de façon générale, le mouvement d'un point M , de masse négligeable m , dans le champ des masses principales m_1 et m_2 sous les hypothèses du problème restreint formulées au début. Ceci permettra de vérifier que les points de Lagrange donnent effectivement des configurations stationnaires du problème restreint, et de discuter ensuite la stabilité de ces configurations.

2.1 Équation différentielle dans le repère tournant

Soit $\mathbf{x} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ la décomposition de ce vecteur dans le repère orthonormé tournant $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ en rotation constante $\overrightarrow{\omega} = \omega\mathbf{k}$ autour de l'axe vertical. En notant ' la dérivée par rapport au temps, la vitesse \mathbf{x}'_r et l'accélération \mathbf{x}''_r de M relatives à ce repère sont données par

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'_r &:= x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \\ \mathbf{x}''_r &:= x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} + z''\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Comme $\mathbf{i}' = \overrightarrow{\omega} \wedge \mathbf{i} = \omega\mathbf{j}$, $\mathbf{j}' = \overrightarrow{\omega} \wedge \mathbf{j} = -\omega\mathbf{i}$ et $\mathbf{k}' = 0$, on a $\mathbf{i}'' = \omega\mathbf{j}' = -\omega^2\mathbf{i}$, $\mathbf{j}'' = -\omega^2\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}'' = 0$. Ces dérivées interviennent dans le calcul de l'accélération absolue $\mathbf{x}'' = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})''$ par rapport à un repère fixe ; on voit ainsi facilement qu'elle est liée à \mathbf{x}''_r et \mathbf{x}'_r par la relation :

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}''_r + 2\overrightarrow{\omega} \wedge \mathbf{x}'_r - \omega^2(\mathbf{x} - z\mathbf{k}).$$

D'après Newton, le produit $m\mathbf{x}''$ est égal à la somme des forces qui s'exercent sur le point M de masse m , qui sont ici l'attraction des masses m_1 et m_2 placées en M_1 et M_2 . L'équation différentielle du mouvement de M par rapport au repère tournant s'écrit donc, avec $\mathbf{r}_i = \overrightarrow{M_iM}$ et $r_i = M_iM$,

$$\mathbf{x}''_r = -\frac{Gm_1}{r_1^3}\mathbf{r}_1 - \frac{Gm_2}{r_2^3}\mathbf{r}_2 - 2\overrightarrow{\omega} \wedge \mathbf{x}'_r + \omega^2(\mathbf{x} - z\mathbf{k}).$$

Au second membre les deux premiers termes expriment la force de gravitation de M_1 et M_2 , le terme $-2\overrightarrow{\omega} \wedge \mathbf{x}'_r$ est la *force de Coriolis* et $\omega^2(\mathbf{x} - z\mathbf{k})$ est la *force axifuge* (toutes divisées par la masse m). Compte tenu de la troisième loi de Kepler (1), l'équation différentielle du mouvement de M devient :

$$\mathbf{x}''_r = \omega^2 \left(\mathbf{x} - z\mathbf{k} - \alpha_1 \frac{R^3}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \alpha_2 \frac{R^3}{r_2^3} \mathbf{r}_2 \right) - 2\overrightarrow{\omega} \wedge \mathbf{x}'_r \quad (7)$$

avec $\alpha_i = m_i/(m_1 + m_2)$.

Remarque. Introduisons la fonction

$$V(x, y, z) := \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \omega^2 R^3 \left(\frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2} \right),$$

où les $r_i = \left\| \vec{\mathbf{x}} - \overrightarrow{OM_i} \right\|$ s'expriment en fonction de x, y, z selon

$$r_1^2 = (x + \alpha_2 R)^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x - \alpha_1 R)^2 + y^2 + z^2.$$

Comme $\text{grad}(x^2 + y^2) = 2(\mathbf{x} - z\mathbf{k})$ et $\text{grad}(1/r_i) = -\mathbf{r}_i/r_i^3$, le système différentiel (7) s'écrit

$$\mathbf{x}_r'' + 2\vec{\omega} \wedge \mathbf{x}_r' = \text{grad} V, \quad (8)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x'' - 2\omega y' = \partial_x V \\ y'' + 2\omega x' = \partial_y V \\ z'' = \partial_z V, \end{cases}$$

où $\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V$ sont les trois dérivées partielles. En effectuant le produit scalaire de (8) par $2\mathbf{x}_r'$, on en déduit l'intégrale première de Jacobi :

$$2V(x, y, z) - \mathbf{x}_r'^2 = C$$

où C est une constante.

2.2 Configurations stationnaires

Les configurations stationnaires sont celles dans lesquelles les coordonnées x, y, z dans le repère tournant restent constantes ; elles sont caractérisées par $\mathbf{x}_r' = 0$ (identiquement). Alors $\mathbf{x}_r'' = 0$, la force de Coriolis est nulle et l'équation (7) se réduit à

$$\mathbf{x} = z\mathbf{k} + \alpha_1 \frac{R^3}{r_1^3} \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \frac{R^3}{r_2^3} \mathbf{r}_2, \quad (9)$$

avec $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{r}_1 + \alpha_2 \mathbf{r}_2$. Les points O, M_1 et M_2 étant dans le plan horizontal, les vecteurs $\mathbf{x} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{M_1M}$, et $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{M_2M}$ ont la même composante verticale z et l'égalité (9) entraîne $z = 0$. On retrouve ainsi l'équation (2) :

$$m_1 \left(1 - \frac{R^3}{r_1^3} \right) \mathbf{r}_1 + m_2 \left(1 - \frac{R^3}{r_2^3} \right) \mathbf{r}_2 = 0, \quad z = 0.$$

On a montré au §1 que ses solutions sont les cinq points de Lagrange $M = L_1, \dots, L_5$ du plan horizontal.

Réciproquement, soit L l'un de ces points, fixe par rapport au repère $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ (donc en rotation avec lui). Alors la fonction $\mathbf{x} = \overrightarrow{OL}$ vérifie $z = 0$, $\mathbf{x}_r' = 0$ et $\mathbf{x}_r'' = 0$. Elle est donc, en remontant les calculs, solution de (7) : le point de Lagrange L donne bien une solution stationnaire du problème restreint des trois corps.

3 Stabilité

Ces configurations stationnaires sont-elles stables ? Autrement dit une petite masse m , partie d'un point voisin d'un point de Lagrange L avec une vitesse initiale

FIG. 6 – Linéarisation au voisinage du point de Lagrange L .

suffisamment faible, restera-t-elle dans ce voisinage au cours du temps ? Pour étudier cela notons (**Figure 6**)

$$\overrightarrow{OL} = \mathbf{a}, \overrightarrow{LM} = \delta\mathbf{x}, \overrightarrow{M_iL} = \mathbf{a}_i, i = 1, 2,$$

d'où $\overrightarrow{OM} = \mathbf{x} = \mathbf{a} + \delta\mathbf{x}$ et $\overrightarrow{M_iM} = \mathbf{r}_i = \mathbf{a}_i + \delta\mathbf{x}$. Comme les vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{a}_i sont horizontaux, il sera commode de séparer la composante horizontale \mathbf{u} de $\delta\mathbf{x}$ en écrivant

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{u} + \delta z \mathbf{k} \text{ avec } \mathbf{u} := \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j}.$$

Enfin nous noterons $\mathbf{u}'_r := \delta x' \mathbf{i} + \delta y' \mathbf{j}$ et $\mathbf{u}''_r := \delta x'' \mathbf{i} + \delta y'' \mathbf{j}$ les dérivées de \mathbf{u} relatives au repère mobile. L'équation différentielle du mouvement (7) s'écrit alors, en séparant composante horizontale et verticale,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}''_r &= \omega^2 \left(\mathbf{a} + \mathbf{u} - \alpha_1 \frac{R^3}{r_1^3} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{u}) - \alpha_2 \frac{R^3}{r_2^3} (\mathbf{a}_2 + \mathbf{u}) \right) - 2\vec{\omega} \wedge \mathbf{u}'_r \\ \sigma z'' &= -\omega^2 R^3 \left(\frac{\alpha_1}{r_1^3} + \frac{\alpha_2}{r_2^3} \right) \delta z \end{aligned}$$

avec $r_i^2 = \|\mathbf{a}_i + \mathbf{u}\|^2 + \delta z^2$.

3.1 Linéarisation de l'équation différentielle

Supposons l'écart $\delta\mathbf{x} = \overrightarrow{LM}$ suffisamment petit pour permettre de négliger dans les calculs les termes d'ordre supérieur ou égal à deux par rapport à $\delta\mathbf{x}$ (méthode de *linéarisation au voisinage d'une position d'équilibre*). Pour récrire (7) avec cette approximation, on observe que, pour $i = 1, 2$,

$$r_i^2 = (\mathbf{a}_i + \delta\mathbf{x})^2 = a_i^2 \left(1 + 2 \frac{\mathbf{a}_i \cdot \delta\mathbf{x}}{a_i^2} + \frac{\delta\mathbf{x}^2}{a_i^2} \right)$$

où $a_i := M_i L$ est la norme de \mathbf{a}_i . Comme $\mathbf{a}_i \cdot \delta\mathbf{x} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}$ il vient

$$\frac{1}{r_i^3} = \frac{1}{a_i^3} - 3 \frac{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}}{a_i^5} + \dots,$$

les \dots étant d'ordre au moins deux en $\delta\mathbf{x} = \mathbf{u} + \sigma z \mathbf{k}$. En tenant compte de la condition d'équilibre (9) du point L :

$$\mathbf{a} - \alpha_1 \frac{R^3}{a_1^3} \mathbf{a}_1 - \alpha_2 \frac{R^3}{a_2^3} \mathbf{a}_2 = 0,$$

le système différentiel (7) ainsi linéarisé devient

$$\mathbf{u}_r'' = \omega^2 \left(1 - \alpha_1 \frac{R^3}{a_1^3} - \alpha_2 \frac{R^3}{a_2^3} \right) \mathbf{u} + 3\omega^2 R^3 \left(\alpha_1 \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u}}{a_1^5} \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}}{a_2^5} \mathbf{a}_2 \right) - 2\vec{\omega} \wedge \mathbf{u}_r' \quad (10)$$

$$\delta z'' = -\omega^2 \left(\alpha_1 \frac{R^3}{a_1^3} + \alpha_2 \frac{R^3}{a_2^3} \right) \delta z. \quad (11)$$

La solution générale de (11) est de la forme $z(t) = z_0 \cos \omega' t + z_1 \sin \omega' t$ (où z_0, z_1 et ω' sont des constantes réelles), produit scalaire de (z_0, z_1) par un vecteur unitaire. Donc $|z(t)| \leq \sqrt{z_0^2 + z_1^2}$ reste petit si les données initiales z_0, z_1 sont petites : il y a stabilité dans la direction verticale pour le système linéarisé. Pour étudier la composante horizontale $\mathbf{u}(t)$ nous devons distinguer deux cas.

3.2 Stabilité de L_4 et L_5

Pour ces configurations en triangle équilatéral on a $a_1 = a_2 = R$, et l'équation linéarisée (10) se réduit à

$$\mathbf{u}_r'' = 3\omega^2 R^{-2} (\alpha_1 (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{a}_1 + \alpha_2 (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}) \mathbf{a}_2) - 2\vec{\omega} \wedge \mathbf{u}_r'. \quad (12)$$

Au point de Lagrange L_4 le triangle équilatéral $M_1 M_2 L_4$ donne $\mathbf{a}_1 = \frac{R}{2} (\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$, $\mathbf{a}_2 = \frac{R}{2} (-\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$. Avec $\mathbf{u} = \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j}$ et $\beta := \alpha_1 - \alpha_2 = (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$, l'équation (12) équivaut donc au système

$$\begin{cases} \delta x'' = \frac{3\omega^2}{4} (\delta x + \beta\sqrt{3}\delta y) + 2\omega\delta y' \\ \delta y'' = \frac{3\omega^2}{4} (\beta\sqrt{3}\delta x + 3\delta y) - 2\omega\delta x', \end{cases}$$

c'est-à-dire au système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta x' \\ \delta y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta x' \\ \delta y' \end{pmatrix} \text{ avec } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$A = \frac{3\omega^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & \beta\sqrt{3} \\ \beta\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}, \quad B = 2\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice du système sont données par le lemme suivant, qui sera établi dans l'Annexe 1.

Lemme 1 Soient A, B deux matrices 2×2 , avec A symétrique et B antisymétrique. Les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & B \end{pmatrix}$ sont les racines de l'équation

$$\lambda^4 + \lambda^2(\det B - \text{tr } A) + \det A = 0.$$

Pour les matrices (13) l'équation caractéristique s'écrit donc

$$\lambda^4 + \omega^2 \lambda^2 + \frac{27}{16} \omega^4 (1 - \beta^2) = 0, \text{ d'où } \lambda^2 = \frac{\omega^2}{4} \left(-2 \pm \sqrt{27\beta^2 - 23} \right).$$

Supposons $m_1 \geq m_2$ et $27\beta^2 - 23 \geq 0$. Comme

$$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1 - \mu}{1 + \mu}$$

avec $\mu = m_2/m_1 > 0$, cette hypothèse équivaut à $\mu^2 - 25\mu + 1 \geq 0$ et $0 < \mu \leq 1$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\mu} \geq 25 \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{625}}}{2} = 24,9599\dots$$

De plus $0 \leq \beta < 1$, donc $\sqrt{27\beta^2 - 23} < 2$ et les valeurs obtenues pour λ^2 sont strictement négatives. Les quatre valeurs propres de A sont donc imaginaires pures ; comme pour $z(t)$ plus haut, on en déduit la stabilité pour la solution $(x(t), y(t))$ du système linéarisé (12). Pour le système Soleil-Terre ($m_2/m_1 \simeq 3 \cdot 10^{-6}$), ces valeurs propres sont $\lambda \simeq \pm i\omega$ et $\pm i\omega(9/2)10^{-3}$.

En résumé, les configurations stationnaires en triangle équilatéral M_1, M_2, L_i (avec $i = 4, 5$) sont stables pour le système linéarisé (12) dès que le rapport des masses $\mu = m_2/m_1$ est inférieur ou égal à $1/25 = 4\%$.

Qu'en est-il pour le système (7) ? Le comportement de ses solutions pourrait a priori dépendre des termes d'ordre supérieur dans le développement du second membre : un exemple simple de cette difficulté est donné par le système différentiel

$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2) \\ y' = x + y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

L'origine est un point d'équilibre, et le système linéarisé au voisinage de ce point est $x' = -y, y' = x$, de valeurs propres imaginaires pures $\pm i$. Mais, en coordonnées polaires (r, θ) , le système complet s'écrit simplement $r' = r^3, \theta' = 1$ et se résout en $r = r_0/\sqrt{1 - 2r_0^2 t}, \theta = t + \theta_0$. La solution partie de (r_0, θ_0) en $t = 0$ n'est alors définie que pour $0 \leq t < 1/(2r_0^2)$ puisque $r(t) \rightarrow \infty$ pour $t \rightarrow 1/(2r_0^2)$. Sur cet exemple, l'origine est donc un équilibre stable pour le système linéarisé, mais instable pour le système complet.

3.3 Instabilité de L_1, L_2 et L_3 .

Reprenons l'équation différentielle linéarisée (10), avec ici $\mathbf{a}_1 = (1 + p)R\mathbf{i}, \mathbf{a}_2 = pR\mathbf{i}$ où p est l'une des trois solutions de la condition d'équilibre (4). On obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_r'' &= \omega^2 \gamma \mathbf{u} + 3\omega^2(1 - \gamma)x\mathbf{i} - 2\vec{\omega} \wedge \mathbf{u}_r' \\ \text{en notant } \gamma &:= 1 - \frac{\alpha_1}{|1 + p|^3} - \frac{\alpha_2}{|p|^3}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, avec $\mathbf{u} = \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j}$,

$$\begin{cases} \delta x'' = \omega^2(3 - 2\gamma)\delta x + 2\omega\delta y' \\ \delta y'' = \omega^2\gamma\delta y - 2\omega\delta x'. \end{cases}$$

C'est à nouveau de la forme (13), avec $A = \omega^2 \begin{pmatrix} 3 - 2\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, $B = 2\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après le lemme, les valeurs propres sont les racines de

$$\lambda^4 + \omega^2(1 + \gamma)\lambda^2 + \omega^4\gamma(3 - 2\gamma) = 0, \quad (14)$$

équation bicarrée de discriminant $\Delta = \omega^4(1 - \gamma)(1 - 9\gamma)$.

Calculons γ pour les points de Lagrange L_1 , L_2 et L_3 , en supposant petit le rapport $\mu = m_2/m_1$ comme au paragraphe 3. Comme $\alpha_1 = m_1/(m_1 + m_2) = (1 + \mu)^{-1}$ et $\alpha_2 = \mu(1 + \mu)^{-1}$, on vérifie l'identité

$$f(1 + p) + \mu f(p) = (1 + \mu)p\gamma + 1 - |1 + p|^{-3}$$

avec $f(p) = p(1 - |p|^{-3})$ comme au §1.3. Par suite l'équation (4) qui détermine les points de Lagrange équivaut à

$$\gamma = \frac{|1 + p|^{-3} - 1}{(1 + \mu)p}, \quad (15)$$

ce qui facilitera les calculs.

Pour L_1 et L_2 on a vu que $p = \pm(\mu/3)^{1/3} + O(\mu^{2/3})$, d'où $|1 + p|^{-3} = (1 + p)^{-3} = 1 \mp 3(\mu/3)^{1/3} + O(\mu^{2/3})$. L'égalité (15) donne alors $\gamma = -3 + O(\mu^{1/3})$, d'où $\gamma(3 - 2\gamma) = -27 + O(\mu^{1/3})$.

Pour L_3 on a $p = -2 + \frac{7}{12}\mu + O(\mu^2)$, d'où $|1 + p|^{-3} = (-1 - p)^{-3} = 1 + \frac{7}{4}\mu + O(\mu^2)$ et, par (15), $\gamma = -\frac{7}{8}\mu + O(\mu^2)$ et $\gamma(3 - 2\gamma) = -\frac{21}{8}\mu + O(\mu^2)$.

Dans les deux cas le produit des racines en λ^2 de l'équation (14) est strictement négatif pour μ assez petit, donc l'équation (14) en λ a deux racines réelles opposées et deux racines imaginaires conjuguées. La présence d'une valeur propre $\lambda > 0$ entraîne l'instabilité du système linéarisé (10). Par un théorème général sur les équations différentielles (voir par exemple Hirsch and Smale [3] p. 187), on peut ici en déduire l'instabilité du système initial (7).

En résumé, les configurations stationnaires alignées M_1, M_2, L_i (avec $i = 1, 2, 3$) sont instables quand le rapport des masses $\mu = m_2/m_1$ est assez petit.

4 Au delà de la «pure curiosité»

Si les deux corps principaux sont le Soleil et la Terre, le point L_1 est un emplacement idéal pour un satellite d'observation continue du Soleil, sans y être jamais gêné par la Terre ni même par la Lune (environ quatre fois plus proche de la Terre que L_1). L'instabilité de ce point garantit qu'aucun corps naturel ne peut y rester durablement. La place est donc libre pour y installer un satellite artificiel, que de légères corrections de trajectoire suffiront à maintenir au voisinage de L_1 malgré l'instabilité; on trouvera dans [4] un examen détaillé de ces techniques. Les satellites SOHO (Solar and Heliospheric Observatory, qui étudie la couronne solaire), ACE (Advanced Composition Explorer, qui étudie le vent solaire et le milieu interplanétaire) et WIND (qui étudie le vent solaire) sont en orbite à proximité de L_1 . Ce

point permet aussi d'observer la Terre, dont il voit constamment l'hémisphère éclairé par le Soleil : le satellite DSCOVR (Deep Space Climate Observatory) y assure une surveillance continue de la Terre et de la météorologie spatiale.

De même, L_2 est idéal pour l'observation du ciel profond, en y plaçant un télescope dirigé à l'opposé du Soleil et de la Terre. Les satellites WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, qui a étudié le rayonnement cosmologique de 2001 à 2010), Herschel (2009-2013, qui a observé le rayonnement infrarouge), Planck (2009-2013, qui a approfondi l'étude des anisotropies du rayonnement cosmologique), Gaia (2013- ..., qui effectue la cartographie précise d'un milliard d'étoiles) ont été placés au voisinage de L_2 . Le James Webb Space Telescope, qui devrait succéder en 2021 au célèbre Hubble Space Telescope, sera également placé à proximité de L_2 .

Quant à L_3 , exactement à l'opposé de la Terre par rapport au Soleil, il a pu alimenter quelque temps, en science-fiction notamment, le fantasme d'une Anti-Terre, un corps céleste invisible pour nous puisque toujours caché derrière le Soleil... Son instabilité rendait cela très improbable, et on sait maintenant qu'il n'y a aucun corps céleste en L_3 . Et il serait de bien peu d'intérêt d'y envoyer un satellite artificiel : outre l'instabilité, son éloignement et sa position derrière le Soleil rendraient très difficiles les communications entre cet objet et la Terre.

Annexe 1 : preuve du lemme 1

Pour obtenir les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & B \end{pmatrix}$ on pourrait certes développer un déterminant 4×4 , mais il est plus amusant de raisonner comme suit. Pour $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ l'équation aux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 0 & I \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ équivaut à $\eta = \lambda\xi$ et $A\xi + B\eta = \lambda\eta$, ou encore $(A + \lambda B - \lambda^2 I)\xi = 0$ et $\eta = \lambda\xi$. Les valeurs propres cherchées λ sont donc les racines de l'équation

$$\det(A + \lambda B - \lambda^2 I) = 0.$$

Le polynôme caractéristique d'une matrice 2×2 est $\det(C - \mu I) = \mu^2 - \mu \operatorname{tr} C + \det C$ d'où, avec $C = A + \lambda B$ et $\mu = \lambda^2$,

$$\det(A + \lambda B - \lambda^2 I) = \lambda^4 - \lambda^2 \operatorname{tr}(A + \lambda B) + \det(A + \lambda B).$$

Supposons B inversible. Alors

$$\begin{aligned} \det(A + \lambda B) &= \det(AB^{-1} + \lambda I) \det B = (\lambda^2 + \lambda \operatorname{tr}(AB^{-1}) + \det(AB^{-1})) \det B \\ &= \lambda^2 \det B + \lambda \operatorname{tr}(A\tilde{B}) + \det A, \end{aligned}$$

où $\tilde{B} := (\det B)B^{-1}$ est la comatrice de B . Ainsi

$$\det(A + \lambda B - \lambda^2 I) = \lambda^4 - \lambda^3 \operatorname{tr} B + \lambda^2 (\det B - \operatorname{tr} A) + \lambda \operatorname{tr}(A\tilde{B}) + \det A,$$

égalité qui se prolonge par densité que B soit inversible ou non.

Ici A est symétrique et B antisymétrique, d'où $\operatorname{tr} B = 0$, ${}^t(A\tilde{B}) = -\tilde{B}A$ (où t désigne la transposée) donc $\operatorname{tr}(A\tilde{B}) = 0$, ce qui établit le lemme. ■

II. Problème général des trois corps : méthode de Lagrange

Le mémoire [5] de Lagrange introduit une méthode originale d'étude du problème général des trois corps. Au lieu d'examiner les équations différentielles qui gouvernent leurs coordonnées, Lagrange s'intéresse plutôt à celles qui régissent leurs trois distances mutuelles. Il les applique ensuite à plusieurs cas particuliers, le plus simple étant celui où ces distances restent constantes - pure curiosité... - ce qui le conduit aux fameux cinq points.

Dans cette seconde partie, indépendante de la première, *on abandonne les hypothèses particulières du problème restreint* pour considérer le problème le plus général des trois corps. Au **paragraphe 5** on établit le système différentiel de Lagrange vérifié par les distances mutuelles. Au **paragraphe 6** on l'applique à la recherche des configurations stationnaires. L'**Annexe 2** détaille la preuve du lemme 2.

5 Équations générales du problème des trois corps

Pour donner un aperçu des calculs de [5], qui sont d'une remarquable habileté, il sera commode de changer les notations de la première partie, de manière à faire jouer des rôles parfaitement symétriques aux trois corps en jeu.

Notations de la partie II. Soient donc M_1 , M_2 et M_3 trois corps de masses respectives m_1 , m_2 et m_3 dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Notons (**Figure 7**)

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{M_2M_3}, \mathbf{r}_2 = \overrightarrow{M_3M_1}, \mathbf{r}_3 = \overrightarrow{M_1M_2}$$

et $r_i = \|\mathbf{r}_i\|$ pour $i = 1, 2, 3$. On a ainsi $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0$.

Nous utiliserons aussi les fonctions u_i , v_i et les constantes $a_i > 0$, $a > 0$ définies par

$$u_1 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 = \frac{1}{2} (r_1^2 - r_2^2 - r_3^2) \quad (16)$$

$$u_2 = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1 = \frac{1}{2} (r_2^2 - r_3^2 - r_1^2)$$

$$u_3 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2} (r_3^2 - r_1^2 - r_2^2)$$

$$v_1 = \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_3^3}, v_2 = \frac{1}{r_3^3} - \frac{1}{r_1^3}, v_3 = \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \quad (17)$$

$$a_i = Gm_i \text{ pour } i = 1, 2, 3, a = a_1 + a_2 + a_3,$$

G étant la constante de la gravitation. Noter que $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

Soit O une origine fixe quelconque. La loi de la gravitation universelle conduit aux équations différentielles

$$\overrightarrow{OM_1}'' = a_2 \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} - a_3 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}, \overrightarrow{OM_2}'' = a_3 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - a_1 \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3}, \overrightarrow{OM_3}'' = a_1 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} - a_2 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \quad (18)$$

FIG. 7 – Problème général des trois corps.

où, comme précédemment, ' désigne la dérivée par rapport au temps. Pour $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_2}$ on en déduit

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1'' &= -(a_2 + a_3) \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + a_1 \left(\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} \right) \\ &= -a \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + a_1 \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} \right).\end{aligned}$$

Or, compte tenu de $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0$ et (17), on a

$$\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} = v_2 \mathbf{r}_3 - v_3 \mathbf{r}_2$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1'' &= -a \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + a_1 (v_2 \mathbf{r}_3 - v_3 \mathbf{r}_2) \\ \mathbf{r}_2'' &= -a \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + a_2 (v_3 \mathbf{r}_1 - v_1 \mathbf{r}_3) \\ \mathbf{r}_3'' &= -a \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} + a_3 (v_1 \mathbf{r}_2 - v_2 \mathbf{r}_1).\end{aligned}\tag{19}$$

Les expressions de \mathbf{r}_2'' et \mathbf{r}_3'' se déduisent de celle de \mathbf{r}_1'' par permutation circulaire des indices.

La distance r_1 des points M_2 et M_3 est donnée par $r_1^2 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1$ d'où $(r_1^2)'' = 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1'' + 2\mathbf{r}_1'^2$ et, en utilisant (19) et (16),

$$\frac{1}{2}(r_1^2)'' = -\frac{a}{r_1} + a_1 (u_2 v_2 - u_3 v_3) + \mathbf{r}_1'^2\tag{20}$$

et les deux équations analogues. Comme les u_i et v_i ne dépendent que des r_j , il reste seulement à exprimer les $\mathbf{r}_i'^2$ au moyen des r_j . Pour cela, effectuons le produit scalaire de (19) par $2\mathbf{r}_1'$. Il vient

$$2\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_1'' = -a \frac{2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1'}{r_1^3} + a_1 v_2 2\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1' - a_1 v_3 2\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1'.$$

Au second membre on a $2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1' = 2r_1 r_1'$ dans le premier terme. Pour exprimer les deux autres, Lagrange introduit la fonction

$$\sigma := \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3' - \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3'\tag{21}$$

(ces égalités résultent immédiatement de $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0$). Comme $u_2 = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1$ et $u_3 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ d'après les définitions (16), on a

$$2\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1' = u_2' + \sigma \text{ et } 2\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1' = u_3' - \sigma,\tag{22}$$

d'où

$$2\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}''_1 = -2a \frac{r'_1}{r_1^2} + a_1 (u'_2 v_2 - u'_3 v_3 - \sigma v_1)$$

autrement dit

$$\left(\mathbf{r}'_1{}^2 - 2 \frac{a}{r_1} \right)' = a_1 (u'_2 v_2 - u'_3 v_3 - \sigma v_1). \quad (23)$$

Si on définit enfin les fonctions ρ_i par

$$a_i \rho_i = \mathbf{r}'_i{}^2 - 2 \frac{a}{r_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (24)$$

on a, grâce à (23),

$$\rho'_1 = u'_2 v_2 - u'_3 v_3 - \sigma v_1.$$

L'équation différentielle (20) et ses deux analogues deviennent

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(r_1^2)'' &= \frac{a}{r_1} + a_1(u_2 v_2 - u_3 v_3 + \rho_1) \\ \frac{1}{2}(r_2^2)'' &= \frac{a}{r_2} + a_2(u_3 v_3 - u_1 v_1 + \rho_2) \\ \frac{1}{2}(r_3^2)'' &= \frac{a}{r_3} + a_3(u_1 v_1 - u_2 v_2 + \rho_3) \end{aligned} \quad (25)$$

avec

$$\begin{aligned} \rho'_1 &= u'_2 v_2 - u'_3 v_3 - \sigma v_1 \\ \rho'_2 &= u'_3 v_3 - u'_1 v_1 - \sigma v_2 \\ \rho'_3 &= u'_1 v_1 - u'_2 v_2 - \sigma v_3 \\ \sigma' &= a_1 u_1 v_1 + a_2 u_2 v_2 + a_3 u_3 v_3. \end{aligned} \quad (26)$$

Dans (25) et (26) les deuxièmes et troisièmes équations résultent des premières, déjà établies, par permutation circulaire. Quant à l'expression de σ' , on l'obtient en observant que $\sigma' = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}''_2 - \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}''_1$ d'après la définition (21) de σ d'où, en utilisant (19) et la définition (17) de v_3 ,

$$\sigma' = a v_3 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + a_2 v_3 \mathbf{r}_1^2 - a_2 v_1 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 - a_1 v_2 \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 + a_1 v_3 \mathbf{r}_2^2.$$

Or $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = u_3$, $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 = u_2$, $\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 = u_1$ d'après la définition (16) des u_i . Comme $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0$, on a aussi $-\mathbf{r}_1^2 = u_2 + u_3$ et $-\mathbf{r}_2^2 = u_1 + u_3$. En reportant ces valeurs on obtient aussitôt l'expression annoncée de σ' , compte tenu de $a = a_1 + a_2 + a_3$ et $v_1 + v_2 + v_3 = 0$.

Les fonctions u_i et v_i ne dépendent que des trois distances mutuelles r_j . *Le système d'équations différentielles (25) et (26) gouverne l'évolution de ces distances en fonction du temps.*

Remarque. D'après (26) on a $\sum_{i=1}^3 \rho'_i = 0$, d'où l'intégrale première

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i} \left(\mathbf{r}'_i{}^2 - 2 \frac{a}{r_i} \right) = \text{const.}$$

6 Les configurations stationnaires

6.1 Les deux cas

Les équations (25) et (26) se prêtent particulièrement bien à la recherche des **configurations stationnaires** du problème général des trois corps. Supposons en effet que les distances mutuelles r_1, r_2, r_3 ne varient pas au cours du temps, de sorte que le triangle $M_1M_2M_3$ ne se déforme pas. Les fonctions u_i, v_j définies par (16) et (17) sont alors constantes. Les ρ_i le sont aussi d'après (25), et (26) entraîne

$$\sigma v_1 = \sigma v_2 = \sigma v_3 = 0, \text{ avec } \sigma' \text{ constant.} \quad (27)$$

Distinguons deux cas :

(i) σ n'est pas identiquement nul. Alors les trois constantes v_i sont nulles, autrement dit $r_1 = r_2 = r_3$. Les points M_1, M_2, M_3 doivent être les sommets d'un **triangle équilatéral** de côté constant.

(ii) σ est identiquement nul. Alors les points M_1, M_2, M_3 doivent **rester alignés**.

Preuve de (ii). D'après (21) l'égalité $\sigma = 0$ équivaut à $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}'_j = \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}'_i$ pour tous i, j . Les distances r_i étant constantes, on a de plus $(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)' = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}'_j + \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}'_i = 0$ d'après (16). Par suite $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}'_j = 0$ pour tous $i, j = 1, 2, 3$.

On a alors $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 = 0$ ou $\mathbf{r}'_1 \wedge \mathbf{r}'_2 = 0$. En effet, si $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 \neq 0$ les vecteurs \mathbf{r}'_1 et \mathbf{r}'_2 , orthogonaux à \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 , sont tous deux colinéaires à $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2$, d'où $\mathbf{r}'_1 \wedge \mathbf{r}'_2 = 0$.

Premier cas : $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 = 0$. Les points M_1, M_2, M_3 sont alors alignés.

Second cas : $\mathbf{r}'_1 \wedge \mathbf{r}'_2 = 0$. Ce cas se ramène au premier, grâce à la formule suivante établie par Lagrange ([5] p. 279).

Lemme 2 Si les r_i sont constants et σ est identiquement nul, on a

$$(\mathbf{r}'_1 \wedge \mathbf{r}'_2)^2 = a \frac{a_1 r_1^3 + a_2 r_2^3 + a_3 r_3^3}{(r_1 r_2 r_3)^3} (\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2)^2. \quad (28)$$

Bien qu'entièrement élémentaire, la preuve de (28) à partir de (24), (25) et de l'expression (26) de σ' est un peu délicate. Nous la donnons dans l'Annexe 2.

Au second membre de (28), le coefficient de $(\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2)^2$ est strictement positif, donc $\mathbf{r}'_1 \wedge \mathbf{r}'_2 = 0$ entraîne $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 = 0$, ce qui permet de conclure encore que les points sont alignés.

Remarque. Si on admet que le mouvement des trois points s'effectue dans un plan fixe, on peut simplifier la preuve du cas (ii), en raisonnant par l'absurde comme suit. Supposons qu'à un instant t_0 les trois points ne soient pas alignés, ce qui revient à dire que le produit vectoriel $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2$ est non nul à cet instant. Par continuité, les vecteurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 restent linéairement indépendants à tout instant t appartenant à un intervalle ouvert I autour de t_0 . À chaque instant $t \in I$ la dérivée \mathbf{r}'_3 est alors

FIG. 8 – Le barycentre des trois points est pris pour origine.

combinaison linéaire de \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 , et orthogonale à ces deux vecteurs comme on a vu plus haut. Elle est donc identiquement nulle, d'où $\mathbf{r}_3'' = 0$ et, grâce à (19),

$$-a \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} + a_1 (v_1 \mathbf{r}_2 - v_2 \mathbf{r}_1) = 0.$$

Comme $-\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$ et $a = a_1 + a_2 + a_3$, cela s'écrit encore, en se souvenant de la définition des v_i ,

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{r_3^3} + \frac{a_3}{r_1^3} \right) \mathbf{r}_1 + \left(\frac{a_1 + a_2}{r_3^3} + \frac{a_3}{r_2^3} \right) \mathbf{r}_2 = 0.$$

Les deux coefficients scalaires étant strictement positifs, cette équation entraîne que \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 sont colinéaires pour tout $t \in I$, ce qui contredit notre hypothèse.

Pour approfondir les configurations stationnaires, **prenons désormais pour origine O le centre de gravité des trois points (Figure 8)**.

Il est notamment caractérisé par l'équation $a \overrightarrow{OM_1} = a_2 \overrightarrow{M_1 M_2} + a_3 \overrightarrow{M_1 M_3}$, c'est-à-dire

$$a \overrightarrow{OM_1} = a_3 \mathbf{r}_2 - a_2 \mathbf{r}_3 \quad (29)$$

(ou chacune des équations équivalentes obtenues par permutation circulaire des indices). Par suite

$$\begin{aligned} a^2 OM_1^2 &= a_3^2 r_2^2 + a_2^2 r_3^2 - 2a_2 a_3 \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 \\ &= a_3^2 r_2^2 + a_2^2 r_3^2 + a_2 a_3 (r_2^2 + r_3^2 - r_1^2) \end{aligned}$$

d'après (16), donc la distance OM_1 reste constante si r_1, r_2, r_3 le sont. Le centre de gravité O du système, d'accélération nulle, peut être pris pour origine d'un référentiel d'inertie, dans lequel s'appliquent les équations de Newton. On voit ainsi que M_1 se déplace sur une sphère de centre O , son mouvement étant donné par (18) :

$$\overrightarrow{OM_1}'' = a_2 \frac{\mathbf{r}_3}{r_3^3} - a_3 \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3}. \quad (30)$$

Il en va de même, en permutant les indices, pour OM_2 et OM_3 .

6.2 Cas non aligné

Dans le cas (i) on a de plus $r_1 = r_2 = r_3$, constants. En notant r cette valeur commune il vient alors, par (30) et (29),

$$\overrightarrow{OM_1}'' = \frac{1}{r^3} (a_2 \mathbf{r}_3 - a_3 \mathbf{r}_2) = -\frac{a}{r^3} \overrightarrow{OM_1}. \quad (31)$$

FIG. 9 – Triangle équilatéral en rotation.

L'intégration de (31) et des deux équations analogues conduit à

$$\overrightarrow{OM_i} = \mathbf{e}_i \cos \omega t + \mathbf{f}_i \sin \omega t, \quad i = 1, 2, 3,$$

où \mathbf{e}_i et \mathbf{f}_i désignent deux vecteurs constants et $\omega^2 = a/r^3$. Comme la distance OM_i reste constante, les vecteurs \mathbf{e}_i et \mathbf{f}_i doivent être orthogonaux et de même norme. Donc chaque M_i est animé d'un *mouvement circulaire uniforme sur un cercle de centre O* , de période $2\pi/\omega$.

De plus, *les points M_1, M_2, M_3 restent dans un même plan fixe* (passant par O) : montrons par exemple que le mouvement de M_2 s'effectue dans le plan d'origine O engendré par \mathbf{e}_1 et \mathbf{f}_1 . Comme le vecteur

$$\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \cos \omega t + (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1) \sin \omega t$$

garde une norme constante, les vecteurs $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$ et $\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$ doivent être orthogonaux et de même norme : $(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)^2 = (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1)^2$ et $(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \cdot (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1) = 0$. Compte tenu de $\mathbf{e}_i^2 = \mathbf{f}_i^2$ et $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{f}_i = 0$, cela s'écrit en développant

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0.$$

Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ une base orthonormée fixe de l'espace, choisie telle que $\mathbf{e}_1 = \lambda \mathbf{i}$ et $\mathbf{f}_1 = \lambda \mathbf{j}$ avec $\lambda > 0$, et notons $\mathbf{e}_2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23})$, $\mathbf{f}_2 = (f_{21}, f_{22}, f_{23})$ les composantes de \mathbf{e}_2 et \mathbf{f}_2 dans cette base. Les conditions précédentes s'écrivent $e_{21} = f_{22}$ et $f_{21} + e_{22} = 0$, d'où $\mathbf{f}_2 = (-e_{22}, e_{21}, f_{23})$. Comme $\mathbf{e}_2^2 = \mathbf{f}_2^2$ et $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{f}_2 = 0$ on a de plus $e_{23}^2 = f_{23}^2$ et $e_{23}f_{23} = 0$, d'où $e_{23} = f_{23} = 0$. Les vecteurs \mathbf{e}_2 et \mathbf{f}_2 appartiennent au plan engendré par \mathbf{e}_1 et \mathbf{f}_1 , comme annoncé.

Réciproquement, vérifions qu'on obtient bien ainsi une solution des équations (18) du problème des trois corps. Soient A_1, A_2, A_3 trois points affectés des coefficients $a_i = Gm_i$, formant un triangle équilatéral de côté r , et soit O leur barycentre. Pour $i = 1, 2, 3$ notons $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{OA_i}$ et \mathbf{f}_i le vecteur déduit de \mathbf{e}_i par une rotation de $\pi/2$ dans le plan $A_1A_2A_3$. Soient enfin M_i les points définis par $\overrightarrow{OM_i} = \mathbf{e}_i \cos \omega t + \mathbf{f}_i \sin \omega t$ avec $\omega^2 = a/r^3$ et $a = a_1 + a_2 + a_3$ (**Figure 9**).

Alors les points M_i forment un triangle équilatéral de côté constant r , en rotation uniforme autour de leur barycentre O et on a, d'après (29),

$$\overrightarrow{OM_1}'' = -\omega^2 \overrightarrow{OM_1} = -\frac{a}{r^3} \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{r^3} (a_2 \mathbf{r}_3 - a_3 \mathbf{r}_2).$$

Ceci, avec les deux équations analogues pour M_2 et M_3 , établit notre assertion.

6.3 Cas aligné

Dans le cas (ii) les points O, M_1, M_2, M_3 sont alignés. Soit \mathbf{w} un vecteur unitaire de la droite qui les porte et posons $\overrightarrow{OM_i} = \lambda_i \mathbf{w}$ où les λ_i sont des constantes scalaires, deux à deux distinctes, liées par $\sum_{i=1}^3 a_i \lambda_i = 0$ puisque O est le barycentre. Alors l'un au moins des λ_i est strictement négatif et un autre au moins est strictement positif; quitte à changer la numérotation, on peut supposer $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ et $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2$. Les équations de Newton (18) s'écrivent

$$\mathbf{w}'' = \frac{c_1}{\lambda_1} \mathbf{w}, \quad \mathbf{w}'' = \frac{c_2}{\lambda_2} \mathbf{w}, \quad (32)$$

$$c_1 = a_2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{|\lambda_2 - \lambda_1|^3} - a_3 \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{|\lambda_1 - \lambda_3|^3}, \quad c_2 = a_3 \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{|\lambda_3 - \lambda_2|^3} - a_1 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{|\lambda_2 - \lambda_1|^3}.$$

Il est inutile d'écrire ici la troisième équation (18), conséquence des deux premières grâce à $\sum_1^3 a_i \overrightarrow{OM_i} = 0$.

Les deux équations (32) sont compatibles si, et seulement si,

$$\frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2}$$

ce qui s'écrit, compte tenu de $a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 = -a_3 \lambda_3$,

$$\lambda_1 \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{|\lambda_3 - \lambda_2|^3} + \lambda_2 \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{|\lambda_1 - \lambda_3|^3} + \lambda_3 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{|\lambda_2 - \lambda_1|^3} = 0 \quad (33)$$

avec $a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 = 0$.

Réciproquement, toute solution $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ du système d'équations (33) donne une solution $\overrightarrow{OM_i} = \lambda_i \mathbf{w}$, $i = 1, 2, 3$, des équations de Newton (18) en résolvant l'équation différentielle $\mathbf{w}'' = (c_1/\lambda_1) \mathbf{w}$. Les hypothèses sur les λ_i entraînent $c_1 > 0$ d'où $c_1/\lambda_1 < 0$. L'équation se résout en $\mathbf{w} = \mathbf{e} \cos \omega t + \mathbf{f} \sin \omega t$ où \mathbf{e} et \mathbf{f} sont des vecteurs constants, donnés par les conditions initiales, et $\omega^2 = -c_1/\lambda_1$. Le vecteur \mathbf{w} ainsi obtenu sera donc unitaire si \mathbf{e} et \mathbf{f} forment un système orthonormé.

Remarque. Le système (33) généralise l'équation (4) du problème restreint. Dans ce cas en effet on néglige la masse m_3 , d'où $a_3 = 0$ et les notations actuelles sont reliées à celles de 1.3 par $\mathbf{w} = \pm \mathbf{i}$, $\lambda_2 - \lambda_1 = R > 0$, $\lambda_3 - \lambda_2 = pR$ et $a_2/a_1 = m_2/m_1 = \mu$. Par suite $\lambda_1 = -R\mu/(1 + \mu)$, $\lambda_2 = R/(1 + \mu)$, $\lambda_3 = pR + R/(1 + \mu)$, et on vérifie que (33) s'écrit $f(1 + p) + \mu f(p) = 0$ avec $f(p) = p(1 - |p|^{-3})$.

Annexe 2 : preuve du lemme 2

Avec les notations (16)(17)(21) du paragraphe 5, on suppose ici que les distances r_1, r_2, r_3 sont constantes et que σ est identiquement nul. On a d'abord¹

$$\mathbf{r}_1'^2 = \frac{a}{r_1} + a_1 (u_3 v_3 - u_2 v_2), \quad \mathbf{r}_2'^2 = \frac{a}{r_2} + a_2 (u_1 v_1 - u_3 v_3), \quad (34)$$

¹Nous n'aurons pas besoin de l'équation analogue pour $\mathbf{r}_3'^2$.

ce qui résulte immédiatement de (24) et (25) avec $(r_1^2)'' = (r_2^2)'' = 0$. Par suite

$$\frac{\mathbf{r}_1'^2}{r_1^2} - \frac{\mathbf{r}_2'^2}{r_2^2} = av_3 + \frac{a_1}{r_1^2} (u_3v_3 - u_2v_2) + \frac{a_2}{r_2^2} (u_3v_3 - u_1v_1).$$

Multiplions les deux membres par $r_1^2 r_2^2$. Compte tenu de $r_1^2 = -u_2 - u_3$ et $r_2^2 = -u_1 - u_3$, il vient

$$r_2^2 r_1'^2 - r_1^2 r_2'^2 = a(u_1 + u_3)(u_2 + u_3)v_3 + a_1(u_1 + u_3)(u_2v_2 - u_3v_3) + a_2(u_2 + u_3)(u_1v_1 - u_3v_3).$$

Comme $a = a_1 + a_2 + a_3$ cela s'écrit aussi

$$r_2^2 r_1'^2 - r_1^2 r_2'^2 = a_1(u_1 + u_3)u_2(v_2 + v_3) + a_2(u_2 + u_3)u_1(v_1 + v_3) + a_3(u_1 + u_3)(u_2 + u_3)v_3$$

et, compte tenu de $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ utilisé dans les deux premiers termes, on en déduit

$$\begin{aligned} r_2^2 r_1'^2 - r_1^2 r_2'^2 &= (a_3v_3 - a_1v_1 - a_2v_2)U + (a_1u_1v_1 + a_2u_2v_2 + a_3u_3v_3)u_3 \\ &\text{avec } U := u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = r_1^2 r_2^2 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 = (\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2)^2. \end{aligned}$$

Par (26) on a $\sigma' = a_1u_1v_1 + a_2u_2v_2 + a_3u_3v_3 = 0$ et il reste

$$r_2^2 r_1'^2 - r_1^2 r_2'^2 = (a_3v_3 - a_1v_1 - a_2v_2)U. \quad (35)$$

De même, par permutation circulaire,

$$r_3^2 r_2'^2 - r_2^2 r_3'^2 = (a_1v_1 - a_2v_2 - a_3v_3)U \quad (36)$$

$$r_1^2 r_3'^2 - r_3^2 r_1'^2 = (a_2v_2 - a_3v_3 - a_1v_1)U. \quad (37)$$

En ajoutant (35) et (37) on obtient

$$\begin{aligned} 2a_1v_1U &= r_1^2 (r_2'^2 - r_3'^2) - r_1'^2 (r_2^2 - r_3^2) \\ &= r_1^2 (r_1'^2 + r_2'^2 - r_3'^2) - r_1'^2 (r_1^2 + r_2^2 - r_3^2), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu de $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0$ et $\mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}'_3 = 0$,

$$a_1v_1U = r_1'^2 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) - r_1^2 (\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2). \quad (38)$$

De même, en ajoutant (35) et (36),

$$a_2v_2U = r_2'^2 (\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2) - r_2^2 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2). \quad (39)$$

De (38) et (39) on tire, en reprenant la notation $u_3 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$,

$$\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2 = \frac{1}{r_1^2} (u_3 r_1'^2 - a_1 v_1 U) = \frac{1}{r_2^2} (u_3 r_2'^2 + a_2 v_2 U). \quad (40)$$

En multipliant ces deux expressions (40) de $\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2$ on en déduit

$$\begin{aligned} r_1^2 r_2^2 (\mathbf{r}'_1 \wedge \mathbf{r}'_2)^2 &= r_1^2 r_2^2 (r_1'^2 r_2'^2 - (\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2)^2) \\ &= r_1^2 r_2^2 r_1'^2 r_2'^2 - (u_3 r_1'^2 - a_1 v_1 U) (u_3 r_2'^2 + a_2 v_2 U). \end{aligned}$$

La définition de U donne $r_1^2 r_2^2 = U + u_3^2$, d'où

$$r_1^2 r_2^2 (\mathbf{r}'_1 \wedge \mathbf{r}'_2)^2 = [\mathbf{r}_1^{\prime 2} \mathbf{r}_2^{\prime 2} + a_1 u_3 v_1 \mathbf{r}_2^{\prime 2} - a_2 u_3 v_2 \mathbf{r}_1^{\prime 2} + a_1 a_2 v_1 v_2 U] U.$$

Dans le facteur $[\dots]$, remplaçons U par $r_1^2 r_2^2 - u_3^2$:

$$[\dots] = a_1 a_2 v_1 v_2 r_1^2 r_2^2 + (\mathbf{r}_1^{\prime 2} + a_1 u_3 v_1) (\mathbf{r}_2^{\prime 2} - a_2 u_3 v_2),$$

puis $\mathbf{r}_1^{\prime 2}$ et $\mathbf{r}_2^{\prime 2}$ par leurs expressions (34). Il vient, compte tenu de $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ et $u_2 + u_3 = -r_1^2$, $u_1 + u_3 = -r_2^2$,

$$\begin{aligned} [\dots] &= a_1 a_2 v_1 v_2 r_1^2 r_2^2 + \left(\frac{a}{r_1} + a_1 r_1^2 v_2 \right) \left(\frac{a}{r_2} - a_2 r_2^2 v_1 \right) \\ &= \frac{a}{r_1 r_2} (a + a_1 r_1^3 v_2 - a_2 r_2^3 v_1). \end{aligned}$$

Les définitions de a , v_1 et v_2 conduisent finalement à

$$[\dots] = \frac{a}{r_1 r_2 r_3^3} (a_1 r_1^3 + a_2 r_2^3 + a_3 r_3^3),$$

ce qui établit le lemme. ■

Références

[1] BARROW-GREEN, June, *Poincaré and the Three Body Problem*, American Math. Society 1997.

[2] EULER, Leonhard, *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*, 1767.

<http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E327.pdf>

[3] HIRSCH, M. and SMALE, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press 1974.

[4] KOON, W.S., LO, M.W., MARSDEN, J.E. and ROSS, S.D., *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*. http://www.cds.caltech.edu/~marsden/volume/missiondesign/KoLoMaRo_DMissionBook_2011-04-25.pdf

[5] LAGRANGE, Joseph-Louis, *Essai sur le problème des trois corps*, 1772.

http://www.ltas-vis.ulg.ac.be/cmsms/uploads/File/Lagrange_essai_3corps.pdf

https://fr.wikipedia.org/wiki/Point_de_Lagrange

https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_objects_at_Lagrangian_points

<https://map.gsfc.nasa.gov/ContentMedia/lagrange.pdf> (Cornish)

<http://www.astrosurf.com/rondi/3c/accueil.htm>

http://map.gsfc.nasa.gov/mission/observatory_l2.html

(http://aristote.obspm.fr/phynum/TPs/TP_3C_c/doc/cours/cours/cours.html)

<http://www.matapp.unimib.it/~ferrario/mov/index.html> (animations)

<https://www.spaceweather.com/archive.php?day=13&month=10&year=2018&view=view> (spaceweather 13 oct. 2018).

<https://www.youtube.com/watch?v=7PHvDj4TDfM>