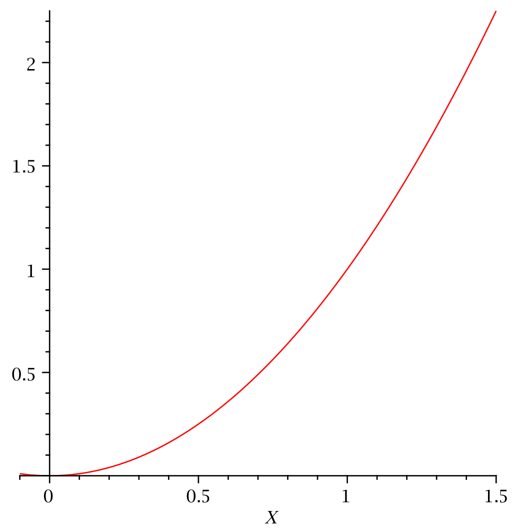
TD 1 : Dérivée des fonctions

Exercice 1. (Dérivée d'une fonction avec paramètre)

a) Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- $f(x) = 3x + 4$
- $f(x) = cx + 4$ où c est une constante.
- $f(x) = x^2 + 4x^3 + c$ où c est une constante.
- $f(x) = x^3 - cx^2 - 2cx$ où c est une constante.
- $f(x) = c - 0,4cx - 0,2c^2$ où c est une constante.

Exercice 2. (Signification de la dérivée) On considère la fonction $f(x) = x^2$. Le dessin ci-dessous montre le graphe de cette fonction.

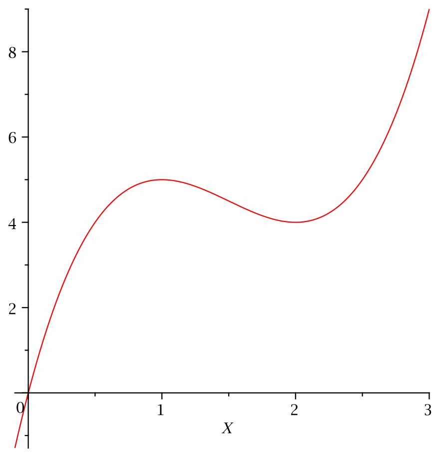


x	$f(x)$	$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
0		
0,5		
0,8		
0,9		
0,98		
1,01		
1,05		
1,1		

a) Dessiner la droite tangente au graphe au point $(1, f(1))$. Estimer, sans calculs, la pente de la droite tangente.

b) Compléter le tableau. Que sera la valeur de $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ si x est très proche de 1 ?

Exercice 3. (Droite tangente horizontale) On considère la fonction $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Le dessin ci-dessous montre le graphe de cette fonction.



a) Dans le dessin, marquer les points où la droite tangente au graphe est horizontale. Aucun calcul n'est nécessaire.

b) Calculer la dérivée de f.

c) Déterminer les solutions de l'équation $f'(x) = 0$. Qu'est-ce que vous observez ?

Exercice 4. (Dérivée d'un produit) On considère des fonctions dérivables $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $g :]a, b[\to \mathbb{R}$. Alors la dérivée du produit $f \cdot g$ se calcule selon la formule

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- $(1 - 2x - x^2) \cdot x$

- $(1 - 4x) \cdot (3x - 1)$

- $(1-2x-c)\cdot(cx+1)$ où c est une constante.

Exercice 5. On considère des fonctions dérivables $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ et $g :]c,d[\to \mathbb{R}$ telles que $g(]c,d[) \subset]a,b[$ (C'est une condition technique qui assure que la fonction composée $f \circ g$ soit définie. Dans cet exercice il n'est pas nécessaire de vérifier cette condition.). Alors la dérivée de la fonction composée $f \circ g$ se calcule par la formule

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Exemple : la fonction $\sin(x^2)$ est la composition de la fonction $f(x) = \sin(x)$ avec $g(x) = x^2$. On sait que $f'(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = 2x$. On a donc

$$(\sin(x^2))' = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- e^{5x}

- e^{x^2}

- e^{cx} où c est une constante.

- $6e^{4x}$

- $\frac{1}{x^2+1}$

Exercice 6. (Fonction exponentielle et dérivée) La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ a la propriété remarquable que sa dérivée $f'(x)$ est également e^x.

a) Calculer la dérivée de $f(x) = 2e^x,\ g(x) = 5e^x,\ h(x) = ce^x$ où c est une constante. Qu'est-ce que vous observez ?

b) Calculer la dérivée de $f(x) = e^{2x},\ g(x) = 5e^{2x},\ h(x) = ce^{2x}$ où c est une constante. Qu'est-ce que vous observez ?

c) Calculer la dérivée de $f(x) = e^{cx}$ où c est une constante. Qu'est-ce que vous observez ?