TD 10 : Révisions

Exercice 1. *(Examen terminal 2018-19)* On modélise une population d'éléphants dans un parc naturel avec l'équation différentielle suivante :

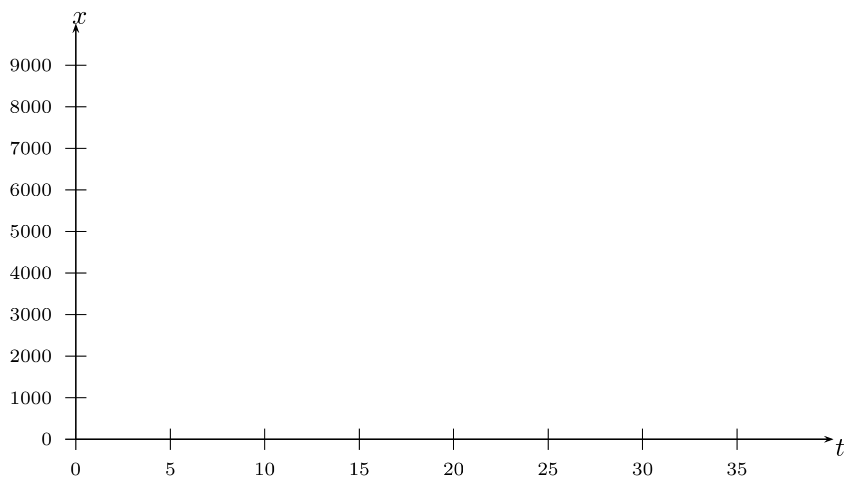
$$x' = 0{,}2x(1 - \frac{x}{8000}) \qquad (1)$$

où $x = x(t)$ désigne l'effectif de la population à l'instant t.

1. Comment s'appelle ce modèle ? Comment s'appellent les constantes 0,2 et 8000 ?

2. Dans le cours vous avez appris la formule pour les solutions de l'équation différentielle (1). Écrire la solution $x(t)$ pour la condition initiale $x_0 = 50$, puis calculer sa valeur aux temps $t = 5$, $t = 15$, $t = 25$ et $t = 30$.

3. En utilisant la question précédente, dessiner le graphe de la solution $x(t)$ pour la condition initiale $x_0 = 50$.



4. Afin de tenir compte des effets de la chasse, on remplace le modèle (1) par l'équation différentielle suivante :
$$x' = 0{,}2x(1 - \frac{x}{8000}) - 300. \tag{2}$$
Calculer les équilibres de l'équation différentielle (2) et préciser leur stabilité.

5. Selon le modèle (2), qu'advient-il à la population d'éléphants si $x_0 = 50$?

6. Afin de tenir compte des effets de la cosanguinité, on remplace le modèle (1) par l'équation différentielle suivante :
$$x' = 0{,}2x(1 - \frac{x}{8000})\frac{x - 100}{8000}. \tag{3}$$
Comment s'appelle ce modèle ? Comment s'appelle la constante 100 ?

7. En utilisant les résultats du cours, donner les équilibres de l'équation différentielle (3). Pour chaque équilibre, indiquer s'il est stable ou instable.

8. Selon le modèle (3), qu'advient-il à la population d'éléphants si $x_0 = 50$?

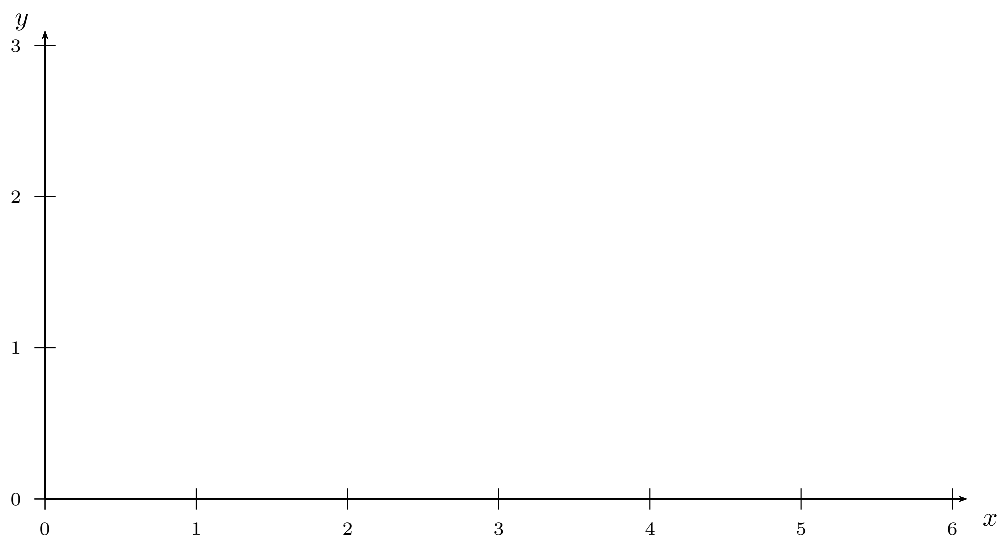
Exercice 2. *(Examen terminal 2018-19)* On étudie deux populations de scorpions qui se nourrissent de la même ressource : on note $x(t)$ l'effectif de scorpions noirs et $y(t)$ l'effectif de scorpions rouges. On suppose que l'évolution des effectifs est modélisée par le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x(1 - \frac{x}{4} - y) \\ y' & = & 2y(1 - \frac{y}{2} - \frac{x}{2}) \end{array} \right. \tag{4}$$

1. Comment s'appelle ce modèle ?

2. Calculer les isoclines et les points d'équilibre du système (4). Donner l'interprétation biologique de chaque point d'équilibre.

3. Dans le système de coordonnées ci-dessous ajouter les isoclines et marquer d'une autre couleur les points d'équilibre.



4. On veut étudier de plus près le champ de vecteurs défini par le système (4). Calculer le vecteur tangent pour chacun des points suivants (en écrivant la réponse à côté) :

   $A(\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{8})$. $B(\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2})$. $C(2, \quad \frac{1}{2})$.

   $D(1, \quad 1)$ $E(\frac{1}{2}, \quad 1)$ $F(\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2})$

   $G = (2, \quad \frac{1}{4})$ $H = (2, \quad 2)$

5. Placer les vecteurs tangents calculés dans la question précédente dans la figure. Remarque : il n'est pas nécessaire de respecter la longueur des vecteurs tangents, on s'intéresse seulement à leur direction.
6. On note $f(x,y) = x - \frac{x^2}{4} - xy$ et $g(x,y) = 2y - y^2 - xy$. Calculer les dérivées partielles de f et g.

7. Pour chacun des quatre points d'équilibre, calculer la matrice jacobienne et déterminer la nature de cet équilibre.

8. Supposons qu'au départ les deux espèces sont présentes. A long terme, est-ce qu'on aura une coexistence des deux espèces ?