Université Côte d'Azur L1SV, année 2019-2020
Mathématiques pour la Biologie (semestre 2)

TD 2 : Modèle de Malthus et modèle logistique

Exercice 1. On considére une population de micro-organismes cultivés dans un milieu liquide. On note $x(t)$ le nombre de cellules dans une culture donnée. Les cellules ayant la possibilité de se multiplier par scissiparité, on suppose[1] que la dynamique de la population est décrite par une loi de Malthus

$$x'(t) = 2x(t),$$

où l'unité de temps t est en heures.

1. Supposons que la population initiale consiste en 10000 cellules. Déterminer la fonction $x(t)$.

2. Calculer $x(t)$ pour $t = 1$, $t = 3$, $t = 5$. Esquisser le graphe de $x(t)$.

3. Combien de temps doit-on attendre pour que la culture contienne 50000 cellules ?

4. Calculer la population $x(t)$ après trois jours. Comparer le résultat avec le nombres d'atomes de la terre (environ 10^{50}). Commenter.

1. Le modèle sera raffiné dans le cours suivant.

Exercice 2. La chenille de l'épicéa (*Choristoneura fumiferana*) est un insecte ravageur des sapins baumiers d'Amérique du Nord. Elle vient de s'introduire dans un groupe d'arbres qu'on étudie.
Sa dynamique peut être représentée par l'équation différentielle suivante

$$N(t)' = 0{,}4\, N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{6000}\right) \tag{1}$$

où $N(t)$ désigne la taille de la population à l'instant t.

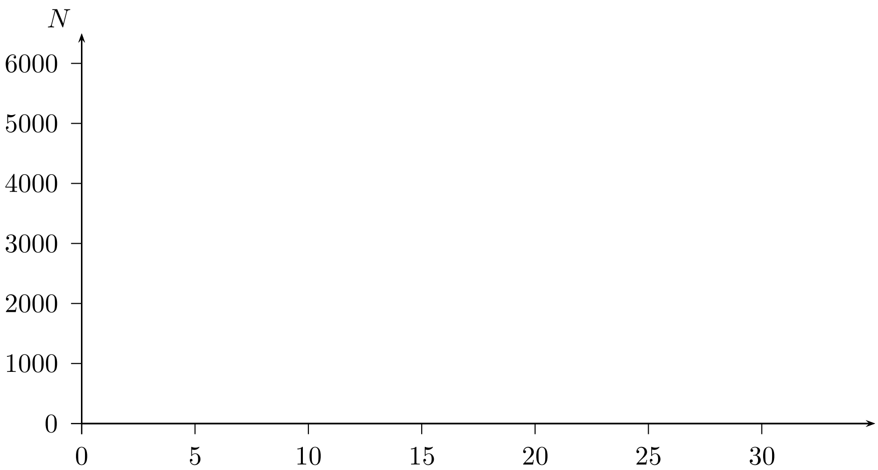
1. Comment s'appelle ce modèle ? Comment s'appellent les constantes $0,4$ et 6000 ?

2. On sait que la solution de cette équation différentielle avec condition initiale N_0 est de la forme

$$N(t) = \frac{6000}{1 + (\frac{6000}{N_0} - 1)e^{-0,4t}}.$$

   Simplifier cette solution lorsque $N_0 = 60$, puis calculer sa valeur aux temps $t = 5$, $t = 10$, $t = 15$ et $t = 25$. Estimer, sans calcul, une valeur approchée en $t = 160$.

3. Esquisser le graphe de la solution de cette équation différentielle de condition initiale $N_0 = 60$ et décrire l'évolution de la population dans ce cas.



4. Si on avait préféré un modèle malthusien $N(t)' = 0{,}4\, N(t)$ au lieu de choisir le modèle (1), quelle serait alors la solution $N(t)$ pour la condition initiale $N_0 = 60$?
   Calculer sa valeur aux temps $t = 5$, 10, et 15. Faire son graphe sur celui de la question 3.
   Que peut-on dire en $t = 100$ et du modèle malthusien en général ?
   Faire ci-dessous un graphe jusqu'à $t = 25$ en graduant les axes.

5. Selon le modèle (1) qu'advient-il à la population si sa taille initiale est $N_0 = 10000$?
   Faire un graphe.

6. On décide de lutter contre les chenilles avec un insecticide qui tue un pourcentage de la population. L'équation (1) devient
$$N(t)' = 0{,}4\, N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{6000}\right) - 0{,}2\, N(t) \tag{2}$$
   S'agit-il toujours d'un modèle logistique ? Si oui, pour quelles valeurs du taux de croissance intrinsèque et de la capacité biotique ?
   Calculer et simplifier la solution de l'équation (2) pour la condition initiale $N_0 = 60$.
   Tracer son graphe sur le dessin de la question 3.