TD 3 : Exemples d'équations différentielles

Exercice 1. On modélise une population de lapins sur l'île de Tatihou (département de la Manche) avec l'équation différentielle suivante :

$$x' = 2x(1 - \frac{x}{200}) \tag{1}$$

où $x = x(t)$ désigne la taille de la population à l'instant t.

1. Comment s'appelle ce modèle ? Comment s'appellent les constantes 2 et 200 ?

2. Dessiner le graphe de la fonction $f(x) = 2x(1 - \frac{x}{200})$. Pour quelles valeurs de x s'annule la fonction f ? Pour quelle valeur de x est-ce que f est maximale ?

3. Soit $x(t)$ une solution de (1) pour la condition initiale x_0. Déterminer les valeurs de x_0 telle que $x(t)$ est une fonction constante.

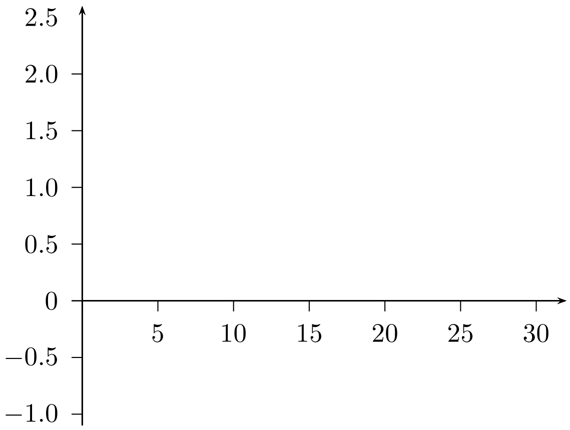
4. Soit $x(t)$ une solution de (1) pour la condition initiale x_0. Esquisser le graphe de $x(t)$ pour $x_0 = 5$. Dans le même dessin, esquisser le graphe pour $x_0 = 250$.

5. L'intrusion de renards traversant en marée basse diminue les chances de survie des lapins. On modélise leur population par l'équation différentielle suivante :

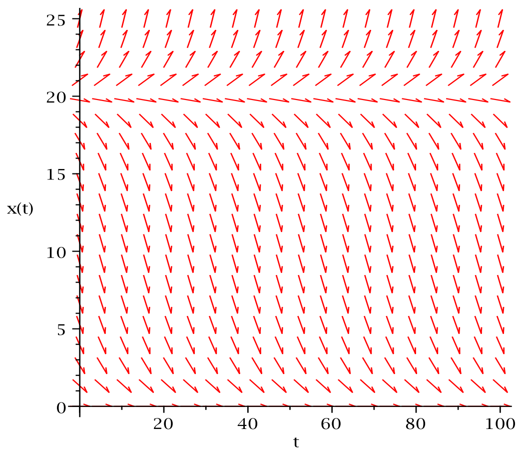
$$x' = 2x(1 - \frac{x}{200})\frac{x - 20}{200}. \tag{2}$$

Comment s'appelle ce modèle ? Quelle est la signification de la constante 20 ?

6. Esquisser la fonction $f(x) = 2x(1 - \frac{x}{200})\frac{x-20}{200}$. Pour quelles valeurs de x est-ce que f s'annule ?



7. Question * Déterminer x entre 0 et 20 tel que $f(x)$ soit minimal. Comparer le résultat de votre calcul avec les vecteurs tangents ci-dessous.



Exercice 2. On considère une population de micro-organismes cultivés dans un milieu liquide. On note $x(t)$ le nombre de cellules dans une culture donnée. Avant que les cellules puissent se multiplier par scissiparité, elles doivent synthétiser de nouvelles composantes cellulaires. Afin d'intégrer cette phase de latence dans le modèle malthusien (voir semaine 2, exercice 1), on suppose que la dynamique de la population est décrite par l'équation différentielle

$$x' = 2(1 - e^{-10t})x, \tag{3}$$

où l'unité de temps t est en heures.

1. Supposons que la population initiale consiste en 10000 cellules. Déterminer la fonction $x(t)$.

2. Calculer $x(t)$ pour $t = 0,2$, $t = 1$, $t = 3$. Esquisser le graphe de $x(t)$.

3. Calculer la population $x(t)$ après trois jours. Comparer le résultat avec le nombres d'atomes de la terre (environ 10^{50}). Commenter.

4. On décide d'améliorer l'équation (3). On suppose que la population est décrite par l'équation différentielle
$$x' = 2(1 - e^{-10t})(1 - \frac{x}{10^9})x, \tag{4}$$
où l'unité de temps t est en heures. Simplifier l'équation (4) pour des grandes valeurs de t (par exemple $t = 10$). Expliquer pourquoi l'équation (4) s'appelle le modèle logistique généralisé. Que représentent les constantes 2 et 10^9 ?

.

5. Simplifier l'équation (4) pour des valeurs rélativement petites de x (par exemple $x = 10^6$). Comment s'appelle ce modèle ?

6. Soit $x(t)$ la solution de l'équation (4) pour une population initiale de $x_0 = 10000$. Donner une estimation de $x(t)$ pour des grandes valeurs de t (par exemple $t = 10$). Esquisser le graphe de $x(t)$.

7. Question * Soit $x(t)$ la solution de l'équation (4) pour une population initiale de $x_0 = 10000$. En utilisant la question précédente ainsi que les résultats de la question 2 donner une estimation [1] pour $x(t)$ pour $t = 0, 2$, $t = 1$, $t = 3$.

.

1. Il existe une solution explicite de l'équation différentielle (4), mais elle ne sera pas utile pour ce cours.