TD 4 : Étude qualitative d'une équation différentielle

Exercice 1. On modélise l'évolution de la population des baleines de l'Océan Atlantique par l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0{,}15y\left(1 - \frac{y}{200000}\right). \tag{1}$$

1. De quel type de modèle s'agit-il ? Que représentent les constantes 0,15 et 200000 ?

2. On suppose que l'on autorise un quota de pêche de 1500, c'est-à-dire que l'équation est alors

$$y' = 0{,}15y\left(1 - \frac{y}{200000}\right) - 1500.$$

   Indiquer quels sont les équilibres de cette équation et préciser leur stabilité. Dessiner.

3. Selon ce modèle, qu'advient-il à la population de baleines sachant que $y_0 = 20000$? Dessiner.

4. Reprendre les 2 dernières questions en supposant cette fois qu'au-delà du quota légal des activités de pêche illicite portent le prélèvement sur la ressource de 1500 à 3750. Dessiner.

.

Exercice 2. On modélise une population de lapins sur l'île de Tatihou (département de la Manche) avec l'équation différentielle suivante :

$$x' = x\left(\frac{-x^2}{200} + 1,1x - 20\right). \tag{2}$$

On note $f(x) = x\left(\frac{-x^2}{200} + 1,1x - 20\right)$.

1. Calculer la dérivée de f.

2. Calculer les équilibres de l'équation différentielle (2) et préciser leur stabilité.

3. Selon ce modèle, qu'advient-il à la population de lapins si $x_0 = 30$? Esquisser la solution $x(t)$.

4. Selon ce modèle, qu'advient-il à la population de lapins si $x_0 = 10$? Esquisser la solution $x(t)$.

Exercice 3. On considère une population bactérienne dans une culture, notons $y(t)$ la taille de la population. Notons par $A(t)$ la concentration d'un agent antimicrobien qu'on introduit au temps $t = 0$ dans la culture. On suppose que cet agent se dégrade de façon exponentielle

$$A(t) = 100e^{-t}$$

où 100 est la concentration au temps $t = 0$. La dynamique de la population bactérienne est donnée par l'équation différentielle

$$y' = -\frac{1}{\frac{K}{100e^{-t}} + 1} y. \tag{3}$$

où $K > 0$ est une constante (dite de Michaelis-Menten).

1. Déterminer le signe de $-\frac{1}{\frac{K}{100e^{-t}}+1} y(t)$ (en admettant que la population $y(t)$ est un nombre non-négatif). En déduire le comportement de croissance des solutions de (3).

2. On sait que les solutions de (3) sont données par la formule

$$y(t) = y_0 \frac{K + 100e^{-t}}{K + 100} \tag{4}$$

où y_0 est la condition initiale. Simplifier la solution (4) lorsque $K = 50$ et $y_0 = 20$, puis calculer sa valeur aux temps $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ et $t = 4$. Esquisser le graphe de $y(t)$.

3. Supposons encore que $K = 50$ et $y_0 = 20$. Estimer, sans calcul, une valeur approchée en $t = 50$.

4. Estimer, sans calcul $\lim_{t\to\infty} y(t)$ pour des valeurs arbitraires de K et y_0.

5. Selon ce modèle, est-ce que l'agent antimicrobien va éradiquer la population bactérienne ?