Université Côte d'Azur — L1SV, année 2019-2020
Mathématiques pour la Biologie (semestre 2)

$\boxed{\text{CORRIGÉ}}$

TD 5 : Le modèle de Lotka Volterra

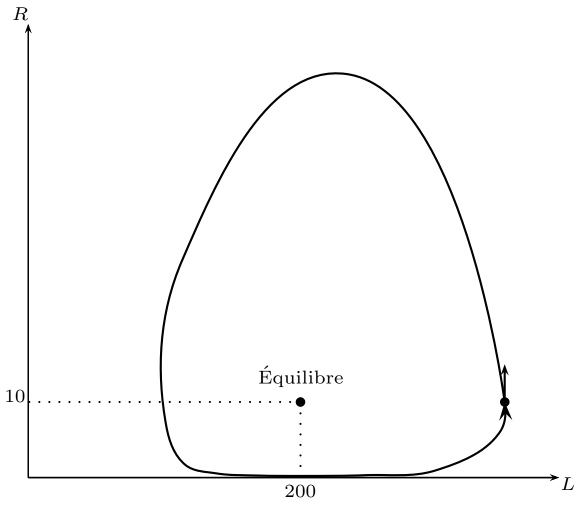
Exercice 1. On considère une population de renards et une population de lapins qui se partagent le même territoire. Leurs dynamiques sont modélisées par le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} L' & = & 2L & - & 0,2LR \\ \\ R' & = & -30R & + & 0,15LR \end{array}\right. \tag{1}$$

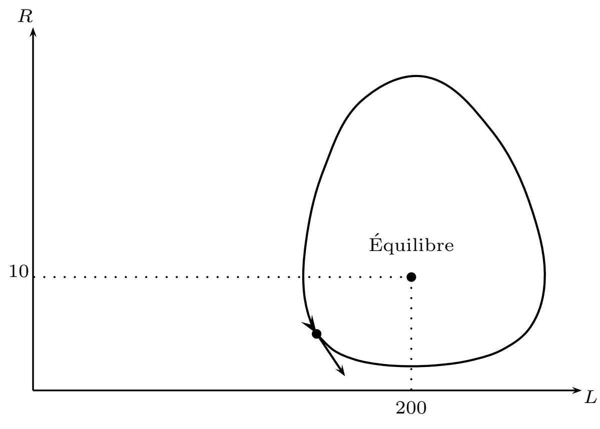
1. Quel est la signification des 4 coefficients du système ?
   2 est le *taux de croissance* des lapins en l'absence d'renards, d'où le signe positif,
   30 est le *taux de décroissance* des renards en l'absence de lapins, d'où le signe négatif,
   0,2 est un coefficient exprimant que les rencontres tournent mal pour les lapins, d'où le $-$,
   0,15 est un coefficient exprimant que les rencontres sont bénéfiques aux renards, d'où le $+$.
2. Trouver les points d'équilibres du système. Qu'adviendra-t-il si un des points d'équilibre est atteint ?

$$\left\{\begin{array}{rcrcccl} L' & = & L(2-0,2R) & = & 0 & \Leftrightarrow & L=0 \text{ ou } R=10 \\ R' & = & R(-30+0,15L) & = & 0 & \Leftrightarrow & R=0 \text{ ou } L=200 \end{array}\right.$$

   On a donc deux points d'équilibre : $(0,0)$ et $(200,10)$. Le point d'équilibre intéressant (ou non-trivial) est donné par $L=200$ et $R=10$.
   Si $L_0=200$ et $R_0=10$ alors $L(t)=200$ et $R(t)=10$ pour tout t : la solution est constante.
3. Supposons que pour $t=0$ les effectifs (exprimés dans des unités ad hoc) sont $L_0=350$ et $R_0=10$. Calculer le vecteur tangent à la trajectoire dans le point $(350;10)$. À l'aide de vos connaissances de cours, tracer l'allure de la trajectoire dans le plan LR en indiquant la position du point $(350;10)$ et du point d'équilibre. Vous pouvez utiliser des échelles différentes sur les axes L et R.
   Mêmes questions pour $L_0=150$, $R_0=5$ (sur un deuxième dessin).

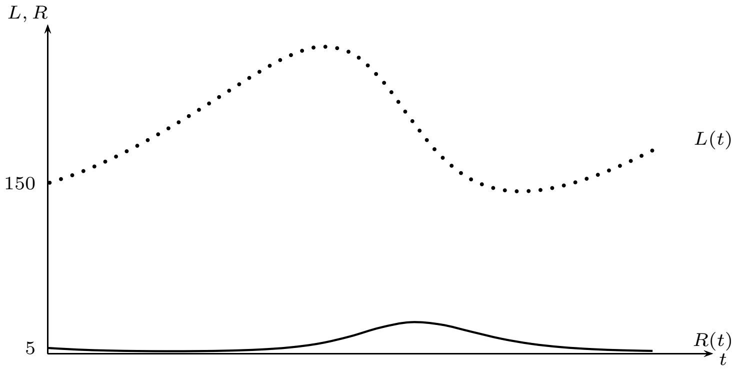


On a indiqué la *direction* du vecteur tangent en $L_0=350$ et $R_0=10$:
$L'(0)=2\cdot 350-0,2\cdot 350\cdot 10=0$
$R'(0)=-30\cdot 10+0,15\cdot 350\cdot 10=225$



On a indiqué la *direction* du vecteur tangent en $L_0=150$ et $R_0=5$:
$L'(0)=2\cdot 150-0,2\cdot 150\cdot 5=150$
$R'(0)=-30\cdot 5+0,15\cdot 150\cdot 5=-37,5$

4. Pour $L_0=150$, $R_0=5$ dessiner sur le même dessin les graphes des fonctions $t\mapsto L(t)$ et $t\mapsto R(t)$.
   Dire si au début (pour $t>0$ proche de 0) L croît ou décroît, expliquer pourquoi.
   Mêmes questions pour R.



Quand $L_0 = 150$ et $R_0 = 5$

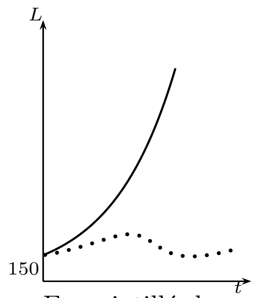
on a $L'(0) = 150 > 0$
donc L croît au début,

par contre $R'(0) = -37,5$
donc R décroît au début.

Le graphe de $L(t)$ en pointillés et celui de $R(t)$ en trait plein, dans le cas où $L_0 = 150$ et $R_0 = 5$.

5. À quelle loi obéit la quantité $L(t)$ en l'absence de renards ? Esquisser le graphe de cette solution pour $L_0 = 150$. Comparer avec celui de la question précédente (à court terme et à long terme).

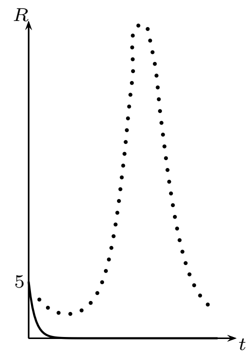
En l'absence d'renards ($R(t) = 0$ pour tout t), on a $L' = 2L$. Les solutions de ce modèle malthusien sont $L(t) = L_0 e^{2t}$.
Au départ le graphe de $150e^{2t}$ croît doucement comme pour celui de la question 4.
La croissance de $150e^{2t}$ est de plus en plus rapide et on obtient des valeurs beaucoup trop grandes à long terme ce qui est un défaut connu du modèle malthusien. Le graphe de la question 4 oscille autour de 200 (très approximativement entre 140 et 300).



En pointillés le graphe de $L(t)$ de la question 4. et celui de $150e^{2t}$ en trait plein.

6. À quelle loi obéit la quantité $R(t)$ en l'absence de lapins ? Esquisser le graphe de cette solution pour $R_0 = 5$. Comparer avec celui de la question précédente (à court terme et à long terme).

En l'absence de lapins ($L(t) = 0$ pour tout t), on a $R' = -30R$.
Les solutions de ce modèle malthusien sont $R(t) = R_0 e^{-30t}$.
Au départ le graphe de $5e^{-30t}$ décroît comme celui de la question 4.
La décroissance de $5e^{-30t}$ est très rapide et on a extinction à brève échéance,
alors que le graphe de la question 4 oscille autour de 10 (très approximativement entre 2 et 30).



En pointillés le graphe de $R(t)$ de la question 4. et celui de $5e^{-30t}$ en trait plein.

7. Supposons qu'on autorise la chasse aux lapins (mais pas aux renards). Dans quel sens va changer chacun des 4 coefficients du système (1) ? Utiliser les notations du cours pour votre réponse. Comment vont changer les coordonnées du point d'équilibre ? Expliquer ce changement.

On utilise les notations du cours : le taux α_1 de croissance des lapins va diminuer puisqu'ils sont chassés, les autres coefficients, α_2 le taux de décroissance des renards et β_1 et β_2 qui expriment le résultat des rencontres renards-lapins pour chaque espèce, ne changent pas.
L'équilibre non nul a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} L = \alpha_2/\beta_2 \\ R = \alpha_1/\beta_1 \end{pmatrix}.$$

Le nombre de renards à l'équilibre va donc diminuer et le nombre de lapins va rester constant. Cette diminuation des renards paraît surprenant ; mais si on considère que les renards sont désormais en compétition avec les chasseurs, on comprend qu'ils ont plus de difficultés à se nourrir.

Exercice 2. On considère une population de sardines (proies) et une populations de requins (prédateurs) dans la Mer adriatique. On suppose que la croissance des sardines est limitée par l'espace, on utilise donc un modèle proie-prédateur à croissance logistique pour modéliser les deux populations :

$$\left\{\begin{array}{lllll} S' & = & + & 0,8S(1-\frac{S}{10}) & - \quad 0,4SR \\ R' & = & - & 0,6R & + \quad 0,05SR \end{array}\right. \tag{2}$$

1. Utiliser la formule du cours pour déterminer les points d'équilibre. Lequel n'admet pas d'interprétation biologique ? Lequel correspond au cas d'absence d'une des espèces ?

   Selon le cours les trois points d'équilibres d'un modèle proie-prédateur à croissance logistique sont

   $$(0,0) \qquad (K,0) \qquad \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}(1-\frac{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}{K})\right).$$

   Ici on a

   $$\alpha_1 = 0{,}8, \alpha_2 = 0{,}6, \beta_1 = 0{,}4, \beta_2 = 0,05 \text{ et } K = 10.$$

   On obtient donc

   $$(0,0) \qquad (10,0) \qquad (12,\ -0,4)\,.$$

   Le point d'équilibre $(12,\ -0,4)$ n'a pas d'interpretation biologique car une population ne peut pas être négative.

   Le point d'équilibre $(10,0)$ correspond à l'absence des prédateurs. Le point $(0,0)$ est un équilibre trivial.

2. Supposons que pour $t=0$ les populations (exprimés dans des unités ad hoc) sont $S_0 = 5$ et $R_0 = 3$. Calculer $S'(0)$ et $R'(0)$. A court terme, est-ce que le nombre de proies va augmenter ou diminuer ? Même question pour les prédateurs.

   Les dérivées des solutions sont données par le système d'équation différentielles :

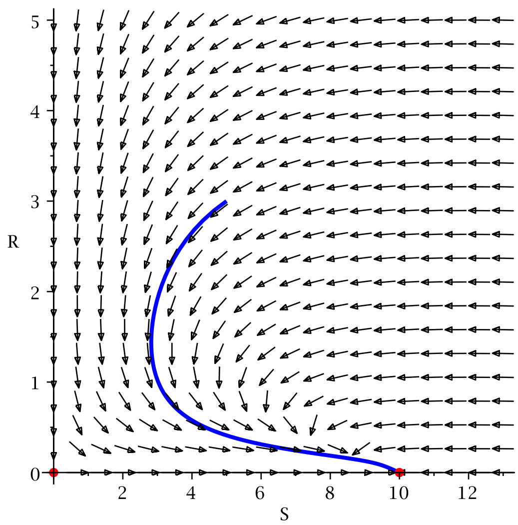
   $$S'(0) = 0,8\times 5\times(1-\frac{5}{10}) - 0,4\times 5\times 3 = -4,$$

   donc la population de sardines va diminuer (au moins à court terme).

   $$R'(0) = -0,6\times 3 + 0,05\times 5\times 3 = -1,05,$$

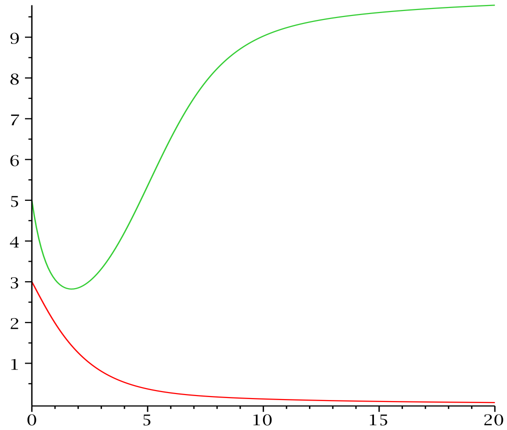
   donc la population de requins va diminuer (au moins à court terme).

3. Ajouter les points d'équilibre au champ de vecteurs ci-dessous. Tracer la trajectoire issue du point $(S,R) = (5,3)$.



Les points d'équilibre ayant une signification biologique sont marqués en rouge. On trace la trajectoire (en bleu) en commençant dans le point $(5,3)$, puis on suit les flèches !

4. Utiliser la trajectoire tracée dans la question 3 pour esquisser les solutions $S(t), R(t)$ du système d'équations différentielles (2) pour la condition initiale $S_0 = 5, R_0 = 3$.



D'après la question 2 les solutions $S(t)$ et $R(t)$ sont décroissantes au temps $t = 0$. En regardant la trajectoire esquissée dans la question 3, on observe que $R(t)$ continue de décroitre vers 0 tandis que $S(t)$ finira par augmenter pour converger vers $K = 10$.
NB : Ce dessin a été fait par un ordinateur, pour votre esquisse il n'est pas nécessaire de graduer l'axe horizontal.

5. Selon vous, est-ce qu'il y aura une co-existence entre proie et prédateurs ?

   En regardant le champ de vecteurs on observe que toutes les trajectoires tendent vers l'équilibre $(10, 0)$. A long terme les prédateurs vont donc disparaître et la population des proies s'approche de la capacité biotique $K = 10$.

6. En cours nous avons considéré un modèle très similiaire. Pour ce modèle on avait observé que

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = 3, \ \lim_{t\to\infty} R(t) = 1,4.$$

   Expliquer la différence entre les deux modèles.

   Dans le modèle considéré en cours le troisième point d'équilibre $(3, \ 1,4)$ est a coefficients positifs, il a donc une interpretation biologique. Comme il est attractif, les trajectoires convergent vers ce point. Ici ce point n'existe pas, les trajectoires convergent vers l'équilibre $(10, 0)$.

   Autre explication : dans le modèle considéré ici, le coefficient β_2 est nettement plus petit. Les rencontres entre requins et sardines ne suffisent pas pour nourrir les requins. Comme, à long terme, les requins sont absents, les sardines se développent selon un modèle logistique : ils augmentent jusqu'à la capacité biotique.