TD 5 : Le modèle de Lotka Volterra

Exercice 1. On considère une population de renards et une population de lapins qui se partagent le même territoire. Leurs dynamiques sont modélisées par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} L' = 2L - 0,2LR \\ \\ R' = -30R + 0,15LR \end{cases} \tag{1}$$

1. Quel est la signification des 4 coefficients du système ?

2. Trouver les points d'équilibres du système. Qu'adviendra-t-il si un des points d'équilibre est atteint ?

3. Supposons que pour $t = 0$ les effectifs (exprimés dans des unités ad hoc) sont $L_0 = 350$ et $R_0 = 10$. Calculer le vecteur tangent à la trajectoire dans le point $(350; 10)$. À l'aide de vos connaissances de cours, tracer l'allure de la trajectoire dans le plan LR en indiquant la position du point $(350; 10)$ et du point d'équilibre. Vous pouvez utiliser des échelles différentes sur les axes L et R.
   Mêmes questions pour $L_0 = 150$, $R_0 = 5$ (sur un deuxième dessin).

4. Pour $L_0 = 150$, $R_0 = 5$ dessiner sur le même dessin les graphes des fonctions $t \mapsto L(t)$ et $t \mapsto R(t)$. Dire si au début (pour $t > 0$ proche de 0) L croît ou décroît, expliquer pourquoi.
   Mêmes questions pour R.

5. À quelle loi obéit la quantité $L(t)$ en l'absence de renards ? Esquisser le graphe de cette solution pour $L_0 = 150$. Comparer avec celui de la question précédente (à court terme et à long terme).

6. À quelle loi obéit la quantité $R(t)$ en l'absence de lapins ? Esquisser le graphe de cette solution pour $R_0 = 5$. Comparer avec celui de la question précédente (à court terme et à long terme).

7. Supposons qu'on autorise la chasse aux lapins (mais pas aux renards). Dans quel sens va changer chacun des 4 coefficients du système (1) ? Utiliser les notations du cours pour votre réponse. Comment vont changer les coordonnées du point d'équilibre ? Expliquer ce changement.

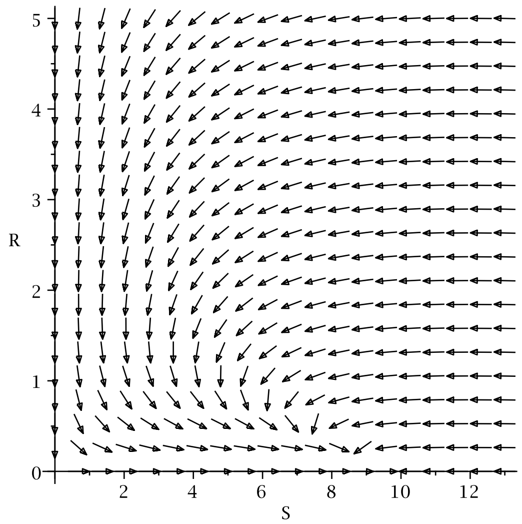
Exercice 2. On considère une population de sardines (proies) et une populations de requins (prédateurs) dans la Mer adriatique. On suppose que la croissance des sardines est limitée par l'espace, on utilise donc un modèle proie-prédateur à croissance logistique pour modéliser les deux populations :

$$\left\{\begin{array}{lclllll} S' & = & + & 0,8S(1-\frac{S}{10}) & - & 0,4SR \\ R' & = & - & 0,6R & + & 0,05SR \end{array}\right. \tag{2}$$

1. Utiliser la formule du cours pour déterminer les points d'équilibre. Lequel n'admet pas d'interprétation biologique ? Lequel correspond au cas d'absence d'une des espèces ?

2. Supposons que pour $t = 0$ les populations (exprimés dans des unités ad hoc) sont $S_0 = 5$ et $R_0 = 3$. Calculer $S'(0)$ et $R'(0)$. A court terme, est-ce que le nombre de proies va augmenter ou diminuer ? Même question pour les prédateurs.

3. Ajouter les points d'équilibre au champ de vecteurs ci-dessous. Tracer la trajectoire issue du point $(S, R) = (5, 3)$.



4. Utiliser la trajectoire tracée dans la question 3 pour esquisser les solutions $S(t), R(t)$ du système d'équations différentielles (2) pour la condition initiale $S_0 = 5, R_0 = 3$.

5. Selon vous, est-ce qu'il y aura une co-existence entre proie et prédateurs ?

6. En cours nous avons considéré un modèle très similiaire. Pour ce modèle on avait observé que

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = 3, \ \lim_{t\to\infty} R(t) = 1,4.$$

   Expliquer la différence entre les deux modèles.