Université Côte d'Azur — L1SV, année 2019-2020
Mathématiques pour la Biologie (semestre 2)

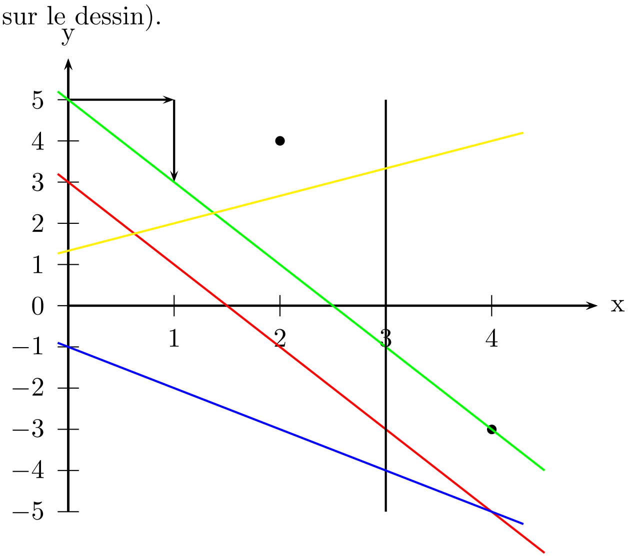
TD 6 : Géométrie dans le plan

Nous commençons avec quelques rappels concernant les droites dans le plan.

Équations de droites dans le plan

Les équations de droites peuvent se présenter de plusieurs façons.

1. La forme la plus habituelle est
$$y = ax + b.$$
Le coefficient a est la pente et b l'ordonnée à l'origine. Cette forme est la plus utile, mais ne permet pas de représenter les droites verticales.
Exemple : considérons la droite $y = -2x + 5$ (en vert sur le dessin). Son ordonnée à l'origine (donc pour $x = 0$) est 5. Lorsque x augmente de 1 alors y diminue de 2 (la pente est -2).
2. Les équations de la forme
$$a_1x + a_2y + a_3 = 0$$
ont l'avantage de permettre de représenter toutes les droites. Si $a_2 \neq 0$ on peut retrouver la forme précédente en faisant
$$y = -\frac{a_1}{a_2}x - \frac{a_3}{a_2}.$$
Si $a_2 = 0$ on obtient une droite verticale, ce sont tous les points avec $x = -\frac{a_3}{a_1}$. Exemple : la droite $2x + 0y - 6 = 0$ (en noir sur le dessin).
Inconvénient : l'équation n'est pas unique, $2x - 3y + 4 = 0$ et $4x - 6y + 8 = 0$ représentent la même droite (en jaune sur le dessin).



Points et droites

La droite est l'ensemble des points (x, y) qui vérifient son équation. Savoir si un point est ou non sur la droite revient donc à regarder si ses coordonnées vérifient ou non l'équation.
Exemples :

1. le point $(4, -3)$ est sur la droite $y = -2x + 5$ car $-3 = -2 \times 4 + 5$.
2. le point $(2, 4)$ n'y est pas car $4 \neq -2 \times 2 + 5$.

Équations de droites données par des informations

Une droite peut être définie par des informations comme sa pente ou des points par lesquels elle passe. Comment trouver son équation ?

a) On donne **deux points distincts** par lesquels la droite passe. Pour connaître l'équation de la droite on doit déterminer ses coefficients. Ces coefficients s'obtiennent comme solution d'un système d'équations.

Exemple : on cherche une droite de la forme $y = ax + b$ passant par $(4, -5)$ et $(2, -1)$. On écrit le système
$$\left\{ \begin{array}{rcl} -5 & = & 4a + b \\ -1 & = & 2a + b \end{array} \right.$$

On résout ce système (par la méthode de votre choix) et obtient $a = -2$ et $b = 3$. L'équation de la droite est $y = -2x + 3$ (en rouge sur le dessin).

b) On donne **la pente et un point** par lequel la droite passe. C'est plus simple puisqu'il y a une seule équation à résoudre.

Exemple : on cherche une droite de pente -2 passant par le point $(4, -5)$. On sait que son équation est de la forme $y = -2x + b$ et qu'on doit avoir $-5 = -2 \times 4 + b$ donc $b = 3$.

Intersection de deux droites

Une droite est déterminée par son équation. Étant donné deux droites, donc deux équations, leur intersection est l'ensemble de solutions du système formé des deux équations. Il peut n'y avoir aucune solution (droites parallèles) ou une infinité (droites confondues).

Exemple 1 : on cherche l'intersection des droites $y = -2x + 3$ et $y = -x - 1$ (en bleu sur le dessin). On écrit le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -2x + 3 \\ y & = & -x - 1 \end{array} \right.$$

d'où on doit avoir $-2x + 3 = -x - 1$ donc $x = 4$. En remplaçant dans l'une des équations on obtient $y = -5$. L'unique point d'intersection est $(4, -5)$.

Exemple 2 : on cherche l'intersection des droites $y = -2x + 3$ et $y = -2x + 5$. On écrit le système $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -2x + 3 \\ y & = & -2x + 5 \end{array} \right.$ d'où on doit avoir $-2x + 3 = -2x + 5$ donc $3 = 5$. Ceci est une contradiction, le système n'a pas de solution. En effet les droites sont parallèles, de pente -2, et non-confondues.

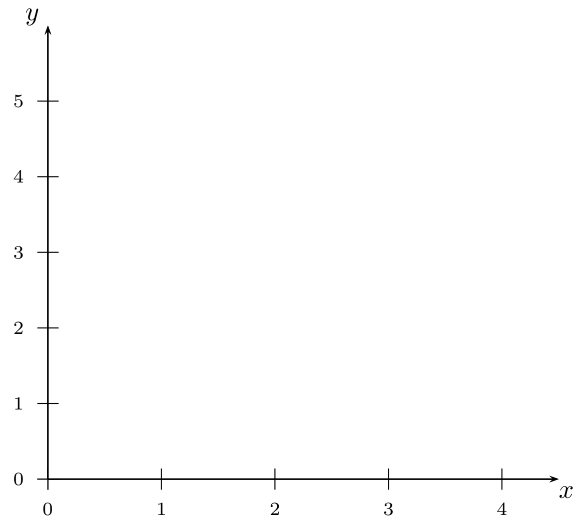
Exercice 1.

1. On considère la droite D passant par les points de coordonnées (4 , 2) et (12 , -2).
   Tracer cette droite puis calculer son équation en précisant sa pente et son ordonnée à l'origine.

2. Sur le graphique précédent tracer la droite D' d'équation $y = 3x - 1$. Expliquer votre méthode. Les points $(4 \quad , 11)$ et $(6 \quad , 1)$ appartiennent-ils à la droite D ? Les points $(4 \quad , 11)$ et $(6 \quad , 1)$ appartiennent-ils à la droite D' ?

Exercice 2.

1. On considère la droite D passant par les points de coordonnées $(4 \quad , 2)$ et $(2 \quad , \frac{5}{2})$. Tracer cette droite puis calculer son équation en précisant sa pente et son ordonnée à l'origine.



2. Sur le graphique précédent tracer la droite D' définie par l'équation $x - 3 = 0$. Calculer l'intersection de D et D'.

3. Sur le graphique précédent tracer la droite D'' définie par l'équation $y - \frac{5}{2} = 0$. Calculer l'intersection de D et D''.

4. Sur le graphique précédent tracer la droite D_1 définie par l'équation $1 - 0{,}5x - 0{,}5y = 0$. Tracer la droite définie par l'équation $1 - 0{,}4x - 0{,}2y = 0$. Calculer l'intersection de D_1 et D_2.

Exercice 3. Soit D_1 la droite définie par l'équation $y = 2x + 4$. Soit D_2 la droite définie par l'équation $y = cx + 6$ où c est un paramètre. Calculer l'intersection de D_1 et D_2.