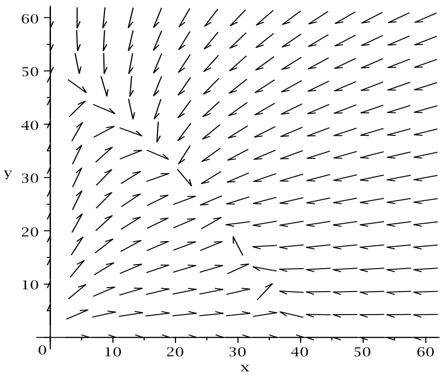
TD 7 : Étude qualitative d'un système d'équations différentielles

Exercice 1. On étudie la compétition entre deux populations de scorpions du désert, noirs et rouges, qui se nourrissent de la même ressource et dont les effectifs x et y vérifient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 0{,}1x(2 - 0{,}05x - 0{,}03y) \\ y' & = & 0{,}1y(1 - 0{,}02x - 0{,}02y) \end{array} \right. \qquad (1)$$

1. Calculer les isoclines $x' = 0$ et $y' = 0$ du système (1) et trouver les quatre points d'équilibre.

2. Voici le dessin du champ de vecteurs défini par le système (1). Ajouter les isoclines et marquer d'une autre couleur les points d'équilibre.



3. Lequel est le point d'équilibre correspondant à la coexistence des deux espèces ? Expliquer pourquoi.

4. Écrire l'équation différentielle qui définit la dynamique des scorpions noirs en absence de scorpions rouges. De quel modèle s'agit-il ? Comment s'appellent les deux constantes intervenant dans ce modèle ? Quelles sont leurs valeurs dans ce cas ?

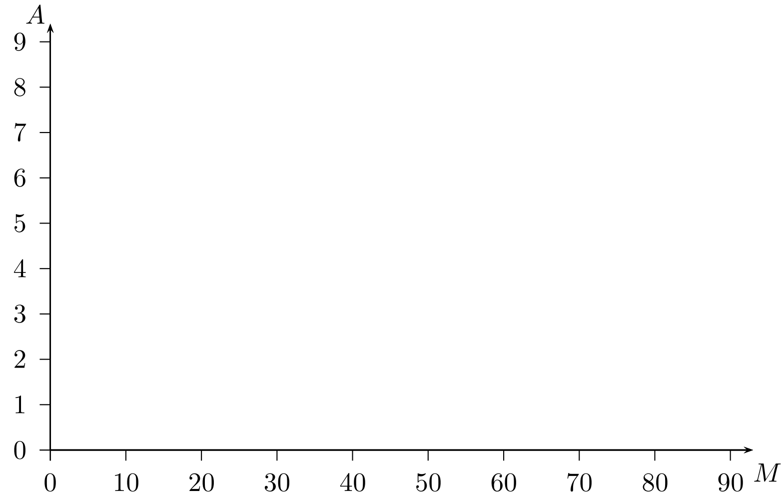
5. Quel est le comportement des scorpions noirs si $y(0) = 0$ et $x(0) = 60$? Esquisser le graphe de la fonction $x(t)$.

Exercice 2. On considère une population d'aigles et une population de marmottes qui se partagent le même territoire. Leurs dynamiques sont modélisées par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} M' &= 1,5M - 0,25MA \\ A' &= -20A + 0,4MA \end{cases} \tag{2}$$

1. Calculer les isoclines $M' = 0$ et $A' = 0$ du système (2) et trouver les points d'équilibre.

2. Dans le système de coordonnées ci-dessous ajouter les isoclines et marquer d'une autre couleur les points d'équilibre.



3. On veut étudier de plus près le champ de vecteurs défini par le système (2). Calculer le vecteur tangent pour chacun des points suivants (en écrivant la réponse à côté) :

$$A = (50, \quad 3) \quad B = (50, \quad 7) \quad C = (20, \quad 6)$$

$$D = (70, \quad 6) \quad E = (20, \quad 3) \quad F = (70, \quad 3)$$

$$G = (60, \quad 7) \quad H = (40, \quad 8) \quad K = (0, 7)$$

4. Placer les vecteurs tangents calculés dans la question précédente dans la figure. Remarque : il n'est pas nécessaire de respecter la longueur des vecteurs tangents, on s'intéresse seulement à leur direction.
5. Supposons que la population initiale est $(M_0, A_0) = (1, 8)$. Soit $(M(t), A(t))$ la solution de (2) pour cette population initiale. Dire si à court terme (pour $t > 0$ proche de 0) la fonction $M(t)$ croît ou décroît.

6. Supposons encore que la population initiale est $(M_0, A_0) = (1, 8)$. Selon ce modèle, est-ce que la population des marmottes va disparaître ? Commenter.

Exercice 3. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = 2x - x^2 - \frac{2}{3}xy$.

2. $f(x, y) = 2y - \frac{2}{3}xy - y^2$.

3. $f(x, y) = 1,5x - 0,25xy$.

4. $f(x,y) = -20y + 0,4xy$.

5. $f(x,y) = 18 - 0,05xy$.

6. $f(x,y) = -0,64y + 0,04xy$.

7. $f(x,y) = x^2 + 2y$.

8. $f(x,y) = 3\ln y - 0,5y + 4\ln x - 0,2x$.