TD 8 : Équilibres d'un système d'équations différentielles

Exercice 1. Le système suivant modélise la dynamique de deux espèces en compétition :

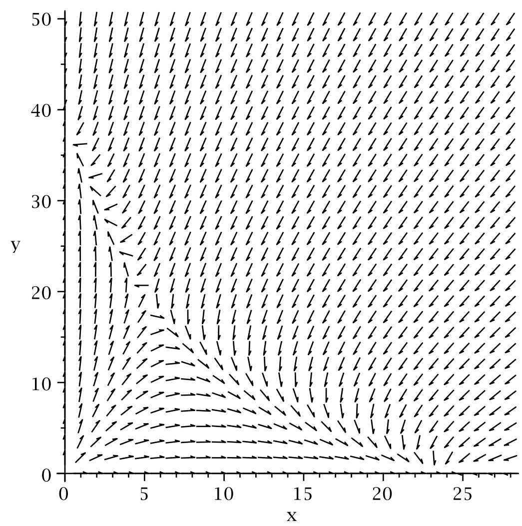
$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & (10 - 0{,}4x - 0{,}4y)x \\ y' & = & (10 - x - 0{,}25y)y \end{array}\right.$$

1. Calculer tous les points d'équilibre du système.
   Lequel d'entre eux a ses deux coordonnées strictement positives ? On le désigne par P.

2. Calculer les dérivées partielles pour chacune des parties droites des équations différentielles.

3. En utilisant la question précédente, calculer la matrice jacobienne $A(x,y)$ au point P.

4. Calculez la trace et le déterminant de la matrice jacobienne au point P, déduisez-en la nature de ce point d'équilibre. Expliquer pourquoi la figure ci-dessous confirme votre réponse (indication : tracer les trajectoires partant des points $(3,5), (3,8), (10,40)$ et $(15,40)$).



Exercice 2. On considère une population de renards et une population de lapins qui se partagent le même territoire. Leurs dynamiques sont modélisées par le système d'équations différentielles suivant :

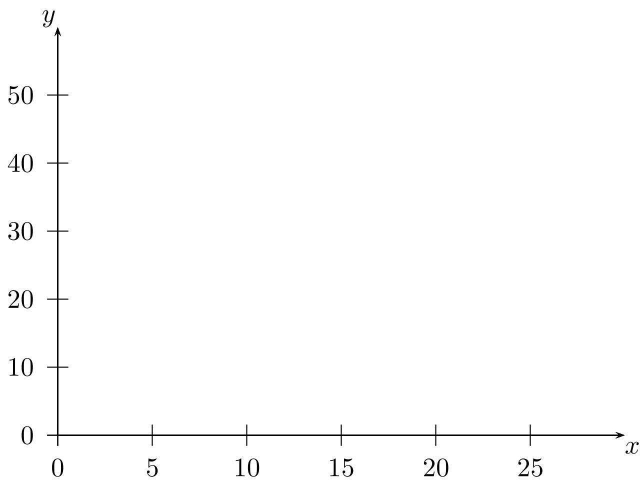
$$\left\{\begin{array}{rcrcr} L' & = & 2L & - & 0{,}2LR \\ R' & = & -30R & + & 0{,}15LR \end{array}\right.$$

Trouver l'équilibre du système correspondant à la coexistence des deux espèces et déterminer son type.

Exercice 3. On alimente un bassin d'élevage de poissons par un flux constant de vers qui ne se reproduisent pas et leur taux de croissance intrinsèque est constant. Ce modèle (appelé *ressource-consommateur*) ressemble (mais n'est pas identique) au modèle de Lotka-Volterra. Dans le système d'équations différentielles x et y sont les effectifs des vers et des poissons respectivement :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x' & = & 18 & - & 0{,}05xy \\ y' & = & -0{,}64y & + & 0{,}04xy \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Calculer les isoclines $x' = 0$ et $y' = 0$ (qui ne sont pas toutes des droites) et les dessiner dans la figure.



2. Calculer les coordonnées du point d'équilibre que l'on placera sur la figure. On le désigne par P.

3. Calculer la matrice jacobienne $A(x,y)$ au point P. En déduire le type de l'équilibre.

4. Indiquer sur les isoclines, de part et d'autre de P, la direction du champ de vecteurs.

5. Tracer sur le graphique l'allure possible de la trajectoire pour la condition initiale $(x_0, y_0) = (16, 35)$. Justifier votre réponse.

6. Tracer ci-dessous les graphes de $x(t)$ et $y(t)$ de la solution du système correspondant à cette trajectoire.