TD 9 : Exemples

Exercice 1. On modélise la dynamique de deux populations avec le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& x(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}) \\ y' &=& y(1-\frac{y}{5}-2\frac{x}{5}) \end{array}\right. \tag{1}$$

1. Comment s'appelle ce modèle ? Quelle est la signification des coefficients du système ?

2. Supposons que la population y est absente. Quel modèle suit la population x ? A long terme, quel sera l'effectif de la population x ?

3. Calculer les coordonnées du vecteur du champ pour chacun des points suivants (en écrivant la réponse à côté) :

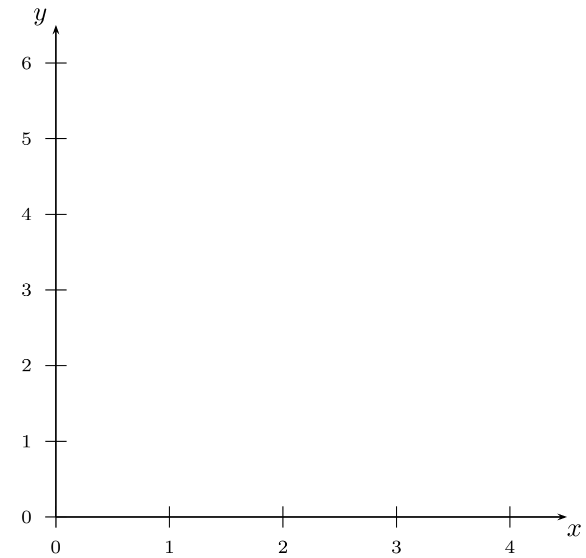
$$C = (1,3) \quad D = (2,3) \quad E = (0{,}5, 0{,}5)$$

$$F = (1,1) \quad G = (1,2)$$

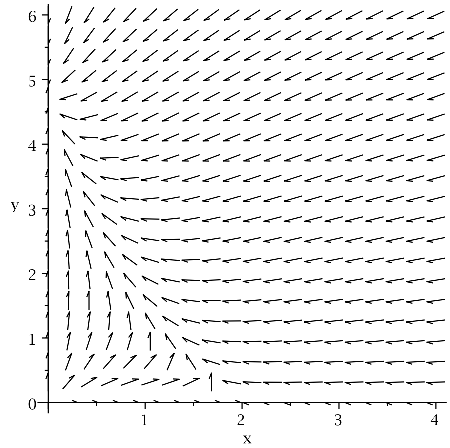
4. Calculer les deux droites qui forment l'isocline $x' = 0$.
Calculer les deux droites qui forment l'isocline $y' = 0$.

5. Calculer tous les points d'équilibre. Le(s)quel(s) n'admet(tent) pas d'interprétation biologique, le(s)quel(s) correspond(ent) au cas d'absence d'une des espèces ?

6. Dessiner sur la figure les points C, D, E, F, G. À chacun de ces points donner l'allure du vecteur du champ.
   Dessiner les isoclines et porter les points d'équilibre sur le dessin.



7. La figure montre le champ de vecteurs associé au système (1). Dessiner l'allure de la trajectoire passant par le point C. Selon vous, les deux espèces vont-elles coexister ou l'une (laquelle ?) devrait-elle disparaître ?

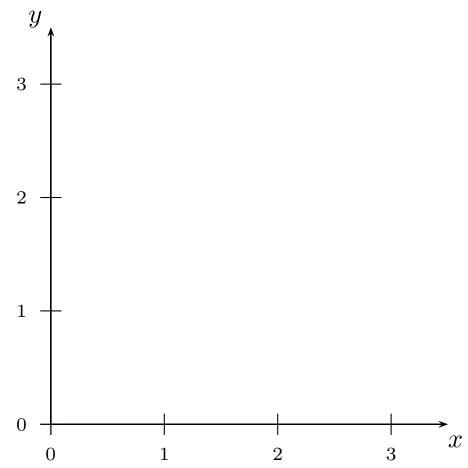


8. Tracer l'allure des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de la solution issue du point C.

Exercice 2. On considère un système d'équations différentielles provenant de l'étude de la cinétique enzymatique (voir cours VII, équation de Michaelis-Menten) :

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x' & = & -xy - y + 3 \\ y' & = & -xy - 2y + 6 \end{array} \right. \tag{2}$$

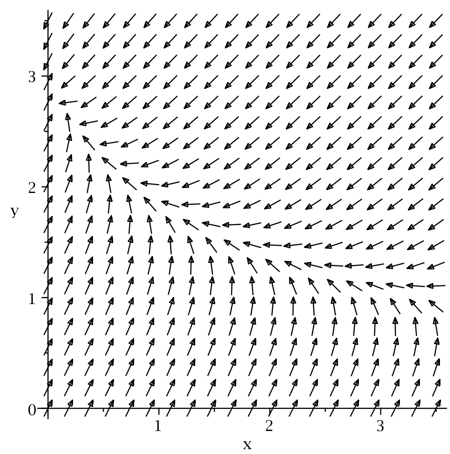
1. Calculer les isoclines $x' = 0$ et $y' = 0$ (qui ne sont pas des droites) et les dessiner dans la figure.



2. À l'aide des isoclines, placer le point d'équilibre, noté P, sur la figure. Calculer ensuite ses coordonnées exactes.

3. Calculer la matrice jacobienne $A(x,y)$ au point P.

4. Sur le graphique ci-dessous esquisser la trajectoire pour la condition initiale $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



5. D'après vos calculs précédents, dans ce système de Michaelis-Menten, la variable x représente-t-elle l'enzyme ou le substrat ?

6. Tracer l'allure des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de la solution correspondant à cette trajectoire. Question bonus : commenter.

Exercice 3. Si $h(x,y)$ est une fonction à deux variables, le vecteur

$$\mathrm{Grad}h(p,q) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(p,q), \frac{\partial h}{\partial y}(p,q)\right)$$

s'appelle le gradient de h au point (p,q). Il est perpendiculaire à la courbe de niveau de h passant par (p,q).

On rappelle également que deux vecteurs $v = (x_1, y_1)$ et $w = (x_2, y_2)$ sont perpendiculaires si leur produit scalaire $v \cdot w$ est nul, c'est-à-dire si $v \cdot w = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

1. On considère la fonction
$$H(x,y) = 3\ln y - 0{,}5y + 4\ln x - 0{,}2x.$$
Calculer le gradient de H au point (10,20).

2. On considère le champ de vecteurs défini par le système de Lotka-Volterra suivant :
$$\left\{\begin{array}{ccccc} x' & = & + & 3x & - & 0{,}5xy \\ y' & = & - & 4y & + & 0{,}2xy \end{array}\right. \tag{3}$$
Calculer le vecteur tangent v au point (10,20).

3. Montrer que les vecteurs obtenus dans les deux questions précédentes sont perpendiculaires.

4. Montrer que le produit scalaire de $\mathrm{Grad}H(p,q)$ et d'un vecteur du champ de vecteurs défini par (3) est nul. Qu'en déduisez-vous ?