GÉOMÉTRIE KÄHLERIENNE ET THÉORIE DE HODGE
FEUILLE D'EXERCICES 1

ANDREAS HÖRING

1. Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable.
a) Soient $z_1, \ldots, z_n$ les coordonnées linéaires sur U, posons x_j et y_j pour leurs parties réelles et imaginaires. Montrer que f est holomorphe en $a \in U$ si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)(a) = 0 \qquad \forall\ j = 1, \ldots, n.$$

b) Pour $a \in U$ on considère l'application $\mathbb{R}$-linéaire donnée par la différentielle

$$df_a : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}.$$

Montrer que f est holomorphe en a si et seulement si df_a est $\mathbb{C}$-linéaire.

2. Principe du maximum.
a) Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|f|$ a un maximum local dans $z_0 \in U$. Montrer qu'il existe un polydisque $D \subset U$ autour de z_0 telle que $f|_D$ est constante.
b) Montrer qu'une fonction complexe $f : X \to \mathbb{C}$ sur une variété complexe compacte est constante.
c) Soit X une sous-variété complexe compacte de $\mathbb{C}^n$. Montrer que X a dimension zéro.

3. Soit $f \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_N]$ un polynôme homogène non-nul et posons

$$X := \{x \in \mathbb{P}^N \mid f(x) = 0\}.$$

Montrer que l'hypersurface X est lisse, c'est-à-dire est une sous-variété lisse de $\mathbb{P}^N$, si et seulement si

$$\{x \in (\mathbb{C}^{N+1} \setminus 0) \mid \frac{\partial f}{\partial X_0}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial X_N}(x) = 0\}$$

est vide.

4. Tores de dimension 1.
Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau, et $X := \mathbb{C}/\Lambda$ le tore associé.
a) Montrer que X est difféomorphe à $S^1 \times S^1$.

Date: 9th November 2008.

b) Soit $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{C}/\Lambda'$ un biholomorphisme tel que $\varphi(0) = 0$. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $\alpha\Lambda = \Lambda'$ et tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "z\mapsto \alpha z"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi'"] \\ \mathbb{C}/\Lambda \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{C}/\Lambda' \end{tikzcd}$$

est commutative.
Indication: se rappeler (ou démontrer) que $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto \alpha z+\beta \mid \alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}\}$.
c) Montrer que X est biholomorphe à un tore de la forme $X(\tau) := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ où $\tau \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Im}(\tau) > 0$.
d) Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. On définit une action de groupe

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, (\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau) \ \mapsto \ \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Montrer que les classes d'équivalence biholomorphe des tores complexes de dimension 1 sont en bijection avec $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.
Remarque : l'ensemble $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ a une structure naturelle de variété complexe. «L'invariant J» définit un biholomorphisme $\mathbb{H}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ (cf. par exemple *T. Ekedahl*, One semester of elliptic curves).

5. Soit X une variété complexe et soit Γ un sous-groupe du groupe des automorphismes holomorphes de X. On dit que Γ agit proprement discontinue sur X si pour tout pair de sous-ensembles compactes $K_1, K_2 \subset X$, on a

$$\gamma(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset$$

pour au plus un nombre fini de $\gamma \in \Gamma$. Le groupe agit sans point fixe si

$$\gamma(x) \neq x \qquad \forall\ \gamma \in \Gamma.$$

a) Supposons que Γ agit proprement discontinue et sans point fixe sur X, et posons X/Γ pour l'ensemble des classes d'équivalence sous cette action. Montrer que X admet une unique structure complexe telle que l'application naturelle $\pi : X \to X/\Gamma$ est holomorphe et localement biholomorphe.
b) Soit λ un nombre complexe telle que $0 < |\lambda| < 1$. On définit une action de groupe

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{C}^n \setminus 0) \to (\mathbb{C}^n \setminus 0), (m, z) \mapsto \lambda^m z.$$

Posons H pour l'ensemble des classes d'équivalence $(\mathbb{C}^n \setminus 0)/\mathbb{Z}$. Montrer que H admet une structure de variété complexe et que H est difféomorphe à $S^{2n-1} \times S^1$.

6. Variété grassmannienne et plongement de Plücker.
Soit $n \geqslant 2$ un nombre naturel et $0 < r < n$ entier. On définit la variété grassmannienne comme l'ensemble

$$G(r, \mathbb{C}^n) := \{S \subset \mathbb{C}^n \text{ sous-espace vectoriel de dimension } r\}.$$

Posons $U(n, \mathbb{C}) \subset GL(n, \mathbb{C})$ pour le groupe unitaire.

a) Montrer qu'on a une application surjective

$$U(n, \mathbb{C}) \to G(r, \mathbb{C}^n).$$

On munit $G(r, \mathbb{C}^n)$ de la topologie quotient donnée par la surjection $U(n, \mathbb{C}) \to G(r, \mathbb{C}^n)$. On définit des cartes sur $G(r, \mathbb{C}^n)$ comme suit : pour tout $T_i \subset \mathbb{C}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension $n - r$, soit

$$U_i := \{S \subset \mathbb{C}^n \text{ sous-espace vectoriel de dimension } r \mid S \cap T_i = 0\}.$$

Soit $S_i \in U_i$ arbitraire, alors on peut définir une application

$$\phi_i : U_i \to \mathrm{Hom}(S_i, T_i) \simeq \mathbb{C}^{r(n-r)}$$

en associant à $S \in U_i$ l'unique application $\mathbb{C}$-linéaire $f \in \mathrm{Hom}(S_i, T_i)$ telle que

$$S \subset \mathbb{C}^n = S_i \oplus T_i$$

est le graphe de f.
b) Montrer que les applications $\phi_i = \phi_i(S_i, T_i)$ définissent une structure complexe sur $G(r, \mathbb{C}^n)$.
On définit une application

$$\psi : G(r, \mathbb{C}^n) \to \mathbb{P}(\bigwedge^r \mathbb{C}^n)$$

comme suit : soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un sous-espace de dimension r et soit $u_1, \ldots, u_r$ une base de U. Le multivecteur

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_r$$

donne un point dans $\mathbb{P}(\bigwedge^r \mathbb{C}^n)$.
c) Monter que ψ est bien définie. Montrer que ψ est un plongement (dite de Plücker).
d) Montrer que $G(r, \mathbb{C}^n)$ est une variété projective.
Indication : montrer que $\operatorname{im} \psi$ peut être identifié aux multivecteurs $w \in \bigwedge^r \mathbb{C}^n$ qui sont décomposables, c'est-à-dire il existe des vecteurs $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$w = v_1 \wedge \ldots \wedge v_r.$$

Pour tout $w \in \bigwedge^r \mathbb{C}^n$, on considère l'application linéaire

$$\phi_w : \mathbb{C}^n \to \bigwedge^{r+1} \mathbb{C}^n, v \mapsto v \wedge w.$$

Montrer que w est décomposable si et seulement si $\operatorname{rg} \phi_w \leqslant n - r$.
e) Soit $e_1, \ldots, e_4$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$. Chaque 2-vecteur $w \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ a une unique décomposition

$$w = X_0 e_1 \wedge e_2 + X_1 e_1 \wedge e_3 + X_2 e_1 \wedge e_4 + X_3 e_2 \wedge e_3 + X_4 e_2 \wedge e_4 + X_5 e_3 \wedge e_4.$$

Montrer que pour les coordonnées homogènes $[X_0 : \ldots : X_5]$ sur $\mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4)$, le plongement de Plücker de $G(2, \mathbb{C}^4)$ dans $\mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4) \simeq \mathbb{P}^5$ a l'équation

$$X_0 X_5 - X_1 X_4 + X_2 X_3 = 0.$$