GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE ET ESPACES DE MODULES - FEUILLE D'EXERCICES 3

ANDREAS HÖRING

1.) Complexe de Koszul

La situation locale

Soit A un anneau commutatif et soient $f_1, \ldots, f_r \in A$. On définit le complexe de Koszul $K_\bullet(f_1, \ldots, f_r)$ comme suit : $K_0 := A$ et K_1 est un A-module libre de rang r et base $e_1, \ldots, e_r$. Pour tout $i \in 1, \ldots, r$ on définit

$$K_i := \bigwedge^i K_1.$$

et des morphismes de A-modules $d_i : K_i \to K_{i-1}$

$$e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_i} \mapsto \sum_{l=1}^{i} (-1)^{l-1} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{j_l} \wedge \ldots \wedge e_{j_i} \ f_{j_l}.$$

(a) Montrer que $d \circ d = 0$[1], i.e. $K_\bullet(f_1, \ldots, f_r)$ est un complexe de A-modules.

On dit que la suite $f_1, \ldots, f_r$ est régulière, si pour tout $i \in 1, \ldots, r$, l'image de f_i dans $A/(f_1, \ldots, f_{i-1})$ n'est pas un diviseur de zéro.

(b) Montrer que si la suite $f_1, \ldots, f_r$ est régulière, l'homologie supérieure du complexe $K_\bullet(f_1, \ldots, f_r)$ est nulle et

$$h_0(K_\bullet(f_1, \ldots, f_r)) \simeq A/(f_1, \ldots, f_r).$$

Indication : procéder par récurrence sur r.

La situation globale

Soit maintenant $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif de dimension n sur k un corps algébriquement clos. Le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ des hyperplans est globalement engendré, fixons une base $e_1, \ldots, e_{n+1}$ de $W := H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$.

Pour $i \in 1, \ldots n+1$ on définit un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-modules $\delta_i : \bigwedge^i W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \bigwedge^{i-1} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ par

$$e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_i} \mapsto \sum_{l=1}^{i} (-1)^{l-1} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{j_l} \wedge \ldots \wedge e_{j_i} \otimes ev(e_{j_l}),$$

où $ev(e_{j_l})$ est donné par le morphisme d'évaluation

$$ev : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1).$$

Posons

$$K_i := \bigwedge^i W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-(i-1)) \qquad \forall\ i \in 1, \ldots n+1,$$

Date: 29 janvier 2008.

[1]Pour simplifier la notation, on écrira d à la place de d_i.

alors on obtient des morphismes $d_i : K_i \to K_{i-1}$ en tensorisant les morphismes δ_i par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-(i-1))$. On obtient donc une suite

$$0 \to K_{n+1} \stackrel{d_{n+1}}{\to} \dots \stackrel{d_3}{\to} K_2 \stackrel{d_2}{\to} K_1 \stackrel{d_1=ev}{\to} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \to 0.$$

(c) Utiliser la première partie pour montrer que cette suite est exacte.

Soit maintenant $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}^n$.

(d) Montrer que la suite

$$(*) \qquad 0 \to K_{n+1} \otimes \mathcal{F} \to \dots \to K_2 \otimes \mathcal{F} \to K_1 \otimes \mathcal{F} \stackrel{ev \otimes id_{\mathcal{F}}}{\to} \mathcal{F}(1) \to 0$$

est exacte.

(e) Supposons que

$$H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(-i)) = 0 \qquad \forall\, i > 0.$$

Montrer que la flèche induite par $ev \otimes id_{\mathcal{F}}$

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(1))$$

est surjective.

Indication : pour $i > 0$, découper en des suites exactes courtes

$$0 \to N_i \to K_i \otimes \mathcal{F} \to N_{i-1} \to 0.$$

Montrer par récurrence que $H^i(\mathbb{P}^n, N_i) = 0$.

2.) Grassmanniennes et plongement de Plücker

Soit V un espace vectoriel de dimension n. Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et notons $G(k, V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels $U \subset V$ de dimension k. Le but de cet exercice est de munir $G(k, V)$ d'une structure de sous-variété projective de $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$. On définit une application

$$\psi : G(k, V) \to \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$$

de la façon suivante : soit $U \subset V$ un sous-espace de dimension k et soit $u_1, \dots, u_k$ une base de U. Le multivecteur

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_k$$

donne un point dans $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$.

(a) Montrer que l'application ψ est bien définie, i.e. ne dépend pas du choix de la base. Montrer que ψ est injective[2].

(b) On identifie $G(k, V)$ à l'image de ψ. Montrer que $G(k, V)$ est une variété projective.

Indication : $G(k, V)$ peut être vu comme l'ensemble des multivecteurs $w \in \bigwedge^k V$ qui sont décomposables, c'est-à-dire il existe des vecteurs $v_1, \dots, v_k \in V$ tel que

$$w = v_1 \wedge \dots \wedge v_k.$$

Pour tout $w \in \bigwedge^k V$, considérons l'application linéaire

$$\phi_w : V \to \bigwedge^{k+1} V, v \mapsto v \wedge w.$$

[2] Il est possible de munir $G(k, V)$ de façon intrinsèque d'une structure de variété complexe lisse. Pour cette structure, ψ est un plongement (plongement de Plücker).

Montrer que w est décomposable si et seulement si $\operatorname{rg} \phi_w \leq n-k$.

(c) Soit $V = \mathbb{C}^4$, et soit $e_1, \ldots, e_4$ la base canonique. Tout 2-vecteur $w \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ s'écrit

$$w = X_0 e_1 \wedge e_2 + X_1 e_1 \wedge e_3 + X_2 e_1 \wedge e_4 + X_3 e_2 \wedge e_3 + X_4 e_2 \wedge e_4 + X_5 e_3 \wedge e_4.$$

Montrer que pour ces coordonnées, le plongement de Plücker de $G(2, \mathbb{C}^4)$ dans $\mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^4) \simeq \mathbb{P}^5$ a l'équation

$$X_0 X_5 - X_1 X_4 + X_2 X_3 = 0.$$

3.) Zoologie des faisceaux

Soit X une variété algébrique normale définie sur un corps k algébriquement clos et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. On définit le sous-faisceau de torsion $Tor(\mathcal{F})$ en posant

$$\Gamma(Tor(\mathcal{F}), U) := Tor(\Gamma(\mathcal{F}, U)) \qquad \forall\, U \subset X \text{ ouvert}$$

où $Tor(\Gamma(\mathcal{F}, U))$ désigne le sous-module de torsion de $\mathcal{F}(U)$ sur l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$. On dit que $\mathcal{F}$ est sans torsion si $Tor\mathcal{F} = 0$. On définit le dual $\mathcal{F}^*$ de $\mathcal{F}$ en posant

$$\mathcal{F}^* := \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$$

et pour le bidual $\mathcal{F}^{**} := (\mathcal{F}^*)^*$. On dit que $\mathcal{F}$ est réflexif si le morphisme naturel $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{**}$ est un isomorphisme.

(a) Montrer que $\mathcal{F}$ est sans torsion si et seulement si le morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{**}$ est injectif.

(b) Supposons que X est une courbe. Montrer que $\mathcal{F}$ est sans torsion si et seulement si $\mathcal{F}$ est localement libre.

(c) Soit $\mathcal{I}_Y$ le faisceau d'idéaux d'un sous-schéma $Y \subset X$ de codimension au moins deux. Montrer que $\mathcal{I}_Y$ est sans torsion mais n'est pas réflexif.

(d) Supposons que $\mathcal{F}$ est réflexif. Alors il existe une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \mathcal{Q} \to 0$$

telle que $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent localement libre et $\mathcal{Q}$ sans torsion. Vice versa, si on a une suite exacte (*) telle que $\mathcal{E}$ est réflexif et $\mathcal{Q}$ sans torsion, alors $\mathcal{F}$ est réflexif.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau réflexif, soit $\mathcal{S} \to \mathcal{F}$ un sous-faisceau et notons $Q := \mathcal{F}/\mathcal{S}$ le faisceau quotient. La saturation $Sat(\mathcal{S})$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{F}$ est le noyau du morphisme

$$\mathcal{F} \to Q/Tor(Q).$$

(e) Montrer que la saturation $Sat(\mathcal{S})$ est un faisceau réflexif.

4.) Calcul des classes de Chern

Soit X une surface complexe projective lisse, et notons K_X son fibré canonique. Soit L un fibré en droites ample sur X, et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de rang r sur X. Pour $a, b \in H^2(X, \mathbb{C})$ nous écrivons

$$a \cdot b \in H^4(X, \mathbb{C})$$

pour le produit d'intersection. Calculer explicitement $c_1(\mathcal{F}(l)) \cdot c_1(K_X)$ et $c_2(\mathcal{F}(l))$ en fonction de

$$r, c_1(\mathcal{F}) \cdot c_1(L), c_1(\mathcal{F}) \cdot c_1(K_X), c_2(\mathcal{F}).$$