

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Grands graphes quantiques, ondes aléatoires et analyse semiclassique.

Mémoire présenté par

Maxime Ingremeau

en vue d'obtenir

l'Habilitation à diriger les recherches

de l'Université Côte d'Azur

Soutenance le 20 novembre 2023

devant un jury composé de :

Nicolas BURQ	-	Université Paris-Saclay
Clotilde FERMANIAN KAMMERER	-	Université Paris Est - Créteil Val-de-Marne
Frédéric NAUD	-	Sorbonne Université
Daniel PERALTA-SALAS	-	Instituto de Ciencias Matemáticas, Madrid
Simona ROTA NODARI	-	Université Côte d'Azur
Gabriel RIVIÈRE	-	Université de Nantes

après avis des rapporteurs :

Daniel PERALTA-SALAS	-	Instituto de Ciencias Matemáticas, Madrid
Gabriel RIVIÈRE	-	Université de Nantes
Jared WUNSCH	-	Northwestern University

Remerciements

Pour commencer, je veux remercier les trois rapporteurs de ce manuscrit, Daniel Peralta-Salas, Gabriel Rivière et Jared Wunsch.

J'ai rencontré Gabriel dès le début de ma thèse, et il a eu une influence décisive sur ma carrière de chercheur. L'étendue de ses centres d'intérêts mathématiques, son humilité et sa curiosité sans limite me l'ont toujours fait voir comme « le mathématicien auquel j'aimerais ressembler dans quelques années », depuis plus de dix ans.

Jared fait aussi partie de ces mathématiciens que j'ai l'impression de connaître depuis toujours. Je me délecte depuis tant d'années de sa culture, de son humour et de ses exposés scientifiques brillants ; depuis quelques années, j'ai aussi le plaisir de partager avec lui nos expériences d'explorateurs perdus dans la terre sauvage de l'analyse numérique, munis de notre seule boussole semiclassical.

J'ai rencontré Daniel beaucoup plus récemment, mais j'apprécie grandement l'originalité de ses travaux, la confiance qu'il m'a toujours accordée, et la qualité de son accueil à Madrid. C'est donc une grande joie pour moi que Gabriel, Jared et Daniel soient les rapporteurs de ce travail.

Je tiens à remercier les autres membres du jury : Nicolas, qui, lorsque j'étais étudiant en master, a pris du temps pour me parler de nombreuses conjectures qui résonnent encore en moi ; Simona, qui, en plus d'être une chercheuse et enseignante sans pareil, est la seule personne que je connaisse qui est toujours de bonne humeur ; Clotilde, dont j'admire l'engagement pour la communauté mathématique ; Frédéric, dont je redécouvre régulièrement la richesse des travaux. Je remercie aussi Thierry, qui ne peut pas faire partie du jury, mais dont les encouragements et les conseils m'ont aidé à soutenir mon HDR.

Je souhaite évidemment remercier Stéphane Nonnenmacher, qui, bien que mon doctorat soit terminé depuis longtemps, continue à suivre mes travaux, à m'inspirer et à m'apporter ses bons conseils dès que j'en ai besoin. Une fois l'HDR passée, il ne me restera plus qu'à essayer d'être un aussi bon encadrant de thèse qu'il l'a été avec moi : ça ne sera pas la partie la plus facile du boulot !

Je veux aussi remercier Nalini Anantharaman pour tout ce qu'elle m'a appris lors de mon postdoc. La profondeur de ses intuitions mathématiques continue à m'inspirer au quotidien.

Ce manuscrit n'aurait pas vu le jour sans mes collaborateurs, que je tiens à remercier sincèrement. Je n'en reviens toujours pas qu'ils aient accepté de m'accompagner pendant des mois ou des années, sur des projets parfois douteux, en subissant ma mauvaise humeur, mon impatience et mes lemmes approximatifs. Un grand merci, donc, à Théophile (qui m'a montré qu'on pouvait apprendre beaucoup de maths en buvant un peu de bière, et réciproquement), à Victorita (qui m'a initié aux arcanes de l'analyse numérique et de l'organisation de conférences), à Alejandro (l'éternel explorateur de nouveaux chemins, dans la vie et dans les mathématiques), à Mostafa (à qui je promets depuis tant d'années de rendre visite au Caire ou à Abu

Dhabi... Maintenant que c'est écrit dans un manuscrit d'HDR, je n'ai plus d'excuse pour ne pas le faire!), à Martin (dont le goulash, l'humour et la pieuvre sont sans pareils), sans oublier Thomas, Yann, Alba, Jesse, Florentin, Brian...

La liste des mathématiciens que je tiens à remercier pour leur intérêt, leur soutien, leur amitié, leurs réponses à mes nombreuses questions, leurs talents musicaux, leurs contributions diverses et variées est sans fin; aussi, au risque d'oublier beaucoup de monde, je veux remercier Jürgen Angst, Yannick Bonthonneau, Adrien Boulanger, Yaiza Canzani, Yves Colin de Verdière, Viet Dang, Thomas Dreyfus, Alix Deleporte, Suresh Eswarathan, Fred Faure, Jeff Galkowski, Damien Gayet, Selim Ghazouani, Colin Guillarmou, Louis Ioos, Antoine Julia, Thibault Lefevre, Yohann Le Floch, Thomas Letendre, Cyril Letrouit, Fabricio Macia, Laura Monk, Ngoc Nhi Nguyen, Guillaume Poly, Julien Sabin, Euan Spence, Hugo Vanneuville, Tobias Weisch...

Quand j'étais étudiant, je pensais naïvement qu'être enseignant-chercheur, c'était enseigner et faire de la recherche. Je n'imaginai pas l'infinie variété des activités que pouvait impliquer ce métier. Ces activités ne sont a priori pas toutes agréables, mais le deviennent quand on le fait en compagnie de personnes que l'on apprécie (et que je remercie) : passer de longues soirées à faire fonctionner des emplois du temps avec Olivier Baldellon; fabriquer des graphes et des pizzas en bois pour les collégiens avec Marc Monticelli; stresser pour boucler les maquettes de licence avec Ann Lemahieu; recréer le campus Valrose en jeu vidéo avec Stéphane Barland; déménager les archives d'illustres collègues avec Simon Girel; organiser le Math Camp avec Michele Ancona, Vincent Pécastaing et Jérémy Toulisse; partager un bureau avec le même Jérémy (une aventure de chaque instant); organiser le séminaire avec Florence Marcotte et faire semblant qu'on comprend les exposés...

La liste des collègues du LJAD que je remercie pour les bons moments passés ces cinq dernières années est trop longue pour être faite ici. Je tiens néanmoins à remercier chaleureusement tous les rangs A du LJAD qui s'investissent dans le département : grâce à eux, les rangs B retrouvent l'espoir qu'un jour peut-être, les responsabilités pédagogiques seront réparties aussi équitablement ici qu'ailleurs.

Ces années à Nice n'auraient pas été les mêmes sans tous les amis azuréens : Jérémy, Célia, Cathy, Nono, Carina, Anahí, Uditha, Julija, Erin, Camille, Rémy, Julie, Nolan... sans oublier les amis non-azuréens de toujours, qui se reconnaîtront. Merci pour tous ces moments magiques passés ensemble!

Ces dernières années ont aussi été celles du théâtre et de l'harmonica : Audrey, Jérôme et Seb, j'espère être un jour un aussi bon enseignant que vous, et savoir partager ma passion avec autant de bienveillance!

Enfin, je ne peux que conclure en remerciant du fond de mon cœur toute ma famille, dont le soutien sans limite est le moteur qui me fait avancer.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Propriétés spectrales de grands graphes quantiques	3
2.1	Définition d'un graphe quantique	4
2.1.1	Spectre de graphes quantiques	4
2.2	Convergence de Benjamini-Schramm	5
2.2.1	Convergence de Benjamini-Schramm et mesures spectrales empiriques	8
2.2.2	Éléments de démonstration	9
2.3	Ergodicité quantique sur les graphes quantiques	9
2.3.1	Notations	10
2.3.2	Le cas des graphes équilatéraux réguliers	11
2.3.3	Le cas non homogène	12
2.3.4	Idées de la démonstration	14
2.4	Graphes quantiques ouverts	17
2.4.1	Résonances de diffusion sur les graphes quantiques	18
2.4.2	Asymptotique du comptage des résonances pour une suite de graphes quantiques ouverts	20
2.4.3	Idées de démonstration	24
2.5	Directions futures	24
3	Chaos quantique et ondes aléatoires	27
3.1	Champs aléatoires gaussiens	27
3.1.1	Domaines nodaux de champs aléatoires gaussiens	29
3.2	Limites locales faibles	30
3.2.1	Une formulation de la conjecture de Berry	32
3.3	États lagrangiens propagés et conjecture de Berry	34
3.3.1	Propagation d'états lagrangiens génériques	35
3.3.2	Un modèle de perturbation aléatoire du laplacien	37
3.3.3	Propagation bruitée d'états lagrangiens	39
3.3.4	Idées de démonstration	40
3.4	Projets futurs	43
4	Une approche semiclassique à la résolution numérique de l'équation de Helmholtz	45
4.1	Un tour d'horizon des méthodes numériques pour l'équation de Helmholtz	46
4.2	Une discrétisation de l'équation de Helmholtz à l'aide d'états cohérents gaussiens	47
4.2.1	Le cadre de [CFDI22]	48

4.2.2	Pourquoi discrétiser avec des états cohérents gaussiens? . . .	49
4.2.3	Comment discrétiser avec des états cohérents gaussiens? . . .	50
4.2.4	Présentation des résultats de [CFDI22]	50
4.2.5	Éléments de preuve du Théorème 10	53
4.3	Directions futures	54
	Bibliographie	57

Introduction

Ce mémoire a pour but de présenter mes travaux de recherches effectués depuis ma soutenance de doctorat en décembre 2016, et plus particulièrement ceux réalisés depuis mon arrivée à Nice en septembre 2018. Ces travaux concernent principalement des propriétés asymptotiques de problèmes spectraux et d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Pendant mon doctorat (et les deux ans qui ont suivi), j'ai étudié les propriétés des systèmes de diffusion à haute fréquence, en particulier lorsque la dynamique classique sous-jacente est chaotique. Ces résultats n'ont pas été inclus dans le présent mémoire. Après cela, mes recherches se sont divisées en trois axes, largement indépendants les uns des autres (bien que se recoupant quelquefois). Ces trois axes correspondront chacun à l'un des chapitres de ce mémoire.

Lors de mon post-doc, j'ai découvert la richesse des graphes quantiques, grâce à Nalini Anantharaman, Mostafa Sabri et Brian Winn ; ensemble, nous avons étudié les propriétés spectrales de grands graphes quantiques, obtenant des résultats très généraux sur la distribution asymptotique des valeurs propres, et des résultats d'équidistribution des fonctions propres sous des hypothèses très naturelles. Plus récemment, j'ai entamé l'étude des propriétés spectrales de grands graphes quantiques ouverts, correspondant à des problèmes de diffusion. Tous ces résultats ont été rassemblés dans le chapitre 2.

Une autre de mes directions de recherche concerne les ondes aléatoires, en lien avec le chaos quantique et la conjecture de Berry. Le chapitre 3 contient mes tentatives de mieux comprendre la formulation de cette conjecture, et de la démontrer dans des situations simplifiées (notamment dans des travaux avec Alejandro Rivera et avec Martin Vogel).

Enfin, le chapitre 4 contient mes travaux en analyse numérique, avec mes collègues (ex-)niçois Théophile Chaumont-Frelet et Victorita Dolean. Ce projet, visant à développer de nouvelles méthodes numériques pour résoudre l'équation de Helmholtz à l'aide d'outils d'analyse semiclassique et d'analyse harmonique, est sans doute celui qui m'a le plus fait sortir de ma zone de confort !

Les trois chapitres qui suivent sont entièrement indépendants les uns des autres. Chacun d'entre eux présente l'état de l'art dans la thématique concernée, et mes contributions ; j'ai fait le choix de simplifier le plus possible la présentation des résultats, en ne donnant pas toujours leurs hypothèses optimales. Je donne quelques idées des démonstrations des résultats, en ne cherchant pas toujours l'exactitude ; en particulier, je fais un usage répété du symbole imprécis \approx . Chaque chapitre se

conclut par quelques projets en cours, ou directions de recherche que j'aimerais explorer dans les années à venir.

Le lecteur désirant avoir plus de détails sur la démonstration des résultats présentés ici pourra trouver l'intégralité de mes articles sur ma page web : <https://math.univ-cotedazur.fr/ingremeau/>

Propriétés spectrales de grands graphes quantiques

Contents

2.1	Définition d'un graphe quantique	4
2.1.1	Spectre de graphes quantiques	4
2.2	Convergence de Benjamini-Schramm	5
2.2.1	Convergence de Benjamini-Schramm et mesures spectrales empiriques	8
2.2.2	Éléments de démonstration	9
2.3	Ergodicité quantique sur les graphes quantiques	9
2.3.1	Notations	10
2.3.2	Le cas des graphes équilatéraux réguliers	11
2.3.3	Le cas non homogène	12
2.3.4	Idées de la démonstration	14
2.4	Graphes quantiques ouverts	17
2.4.1	Résonances de diffusion sur les graphes quantiques	18
2.4.2	Asymptotique du comptage des résonances pour une suite de graphes quantiques ouverts	20
2.4.3	Idées de démonstration	24
2.5	Directions futures	24

De façon informelle, un graphe quantique est un graphe dans lequel chaque arête est munie d'une longueur, et sur lequel on définit un opérateur différentiel de degré 2 (typiquement, le laplacien, muni de conditions aux limites bien choisies sur les sommets).

Les travaux que je présente dans ce chapitre concernent les propriétés spectrales asymptotiques d'une suite de graphes quantiques : étant donné une suite de graphes quantiques (de plus en plus grands et de plus en plus complexes), on s'intéresse aux valeurs propres dans un intervalle spectral fixé. Peut-on décrire la répartition asymptotique des valeurs propres (section 2.2) ? Les propriétés de délocalisation des fonctions propres (section 2.3) ? Dans la section 2.4, on s'intéresse à une variante où certaines arêtes sont infinies : on considère alors les résonances de diffusion, correspondant à un problème spectral non-autoadjoint.

2.1 Définition d'un graphe quantique

Définition 1 Un graphe quantique $\mathcal{Q} = (V, E, L)$ est la donnée suivante :

- Un graphe $G = (V, E)$ dont l'ensemble des sommets est noté V , l'ensemble des arêtes est noté E .
- Une application $L : E \rightarrow (0, \infty)$.

On dit que le graphe est fini si G est un graphe fini. Pour chaque sommet $v \in V$, son degré, c'est-à-dire son nombre de voisins, est noté $d(v)$.

On note B l'ensemble des arêtes orientées du graphe. Si $b \in B$, on note L_b la longueur associée, o_b et t_b l'origine et le terminus de b , et \hat{b} l'arête renversée, dont l'origine est t_b et le terminus est o_b .

Cette définition nous permettra de définir un laplacien auto-adjoint sur le graphe \mathcal{Q} . Il existe des variantes de la Définition 1 : on peut se donner une application $W : E \rightarrow L^\infty(0, 1)$ permettant de considérer des opérateurs de Schrödinger plutôt qu'un laplacien ; une application $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ (ou, plus généralement, en chaque sommet v , une matrice unitaire $d(v) \times d(v)$) permettant de considérer des extensions auto-adjointes plus générales de l'opérateur. Une variante importante, que l'on considèrera en section 2.4, est celle où l'on se donne une application $\mathbf{n} : V \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathbf{n}(v)$ correspondant au nombre d'arêtes infinies que l'on attache à v : le graphe est alors ouvert, menant à des problèmes spectraux non-autoadjoints.

Dans la suite, on s'intéressera souvent à des familles de graphes quantiques, et on aura besoin d'un contrôle uniforme de leurs longueurs et degrés. Si $D \in \mathbb{N}$, et $0 < L_{min} \leq L_{max}$, on notera $\mathfrak{Q}_{D, L_{min}, L_{max}}$ l'ensemble des graphes quantiques $\mathcal{Q} = (V, E, L)$ pour lesquels on a

$$\begin{aligned} \forall v \in V, d(v) &\leq D \\ \forall e \in E, L_{min} &\leq L(e) \leq L_{max}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.1.1 Spectre de graphes quantiques

Étant donné un graphe quantique \mathcal{Q} , on peut considérer les espaces de fonctions sur le graphe :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{Q}} &:= \left\{ f = (f_b)_{b \in B} \in \bigoplus_{b \in B} L^2[0, L_b] \text{ telles que } f_b(L_b - \cdot) = f_{\hat{b}}(\cdot) \text{ et } \sum_{b \in B} \|f_b\|_{L^2([0, L_b])}^2 < \infty \right\} \\ \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}^2 &:= \left\{ f = (f_b)_{b \in B} \in \bigoplus_{b \in B} H^2[0, L_b] \text{ telles que } f_b(L_b - \cdot) = f_{\hat{b}}(\cdot) \text{ et } \sum_{b \in B} \|f_b\|_{H^2([0, L_b])}^2 < \infty \right\} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

On définit également le sous-espace $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}^{Kirch} \subset \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}^2$ des fonctions vérifiant les conditions de Kirchhoff :

$$\begin{aligned} \forall b, b' \in B, f_b(0) = f_{b'}(0) &=: f(v) \text{ si } o_b = o_{b'} = v && \text{(Continuité)} \\ \forall v \in V, \sum_{b: o_b=v} f'_b(0) &= 0. && \text{(Conservation du courant)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

L'opérateur $H_{\mathcal{Q}} : \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}^{Kirch} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ agissant sur $\psi = (\psi_b)_{b \in B}$ par

$$(H_{\mathcal{Q}}\psi_b)(x) = -\psi_b''(x) \quad (2.4)$$

est alors auto-adjoint si le graphe \mathcal{Q} est fini, ou, plus généralement, s'il appartient à un espace $\mathfrak{Q}_{D, L_{min}, L_{max}}$.

Si le graphe \mathcal{Q} est fini, alors l'opérateur $H_{\mathcal{Q}}$ est à résolvante compacte, de sorte qu'il existe une suite de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow \infty$ et des fonctions propres associées ψ_n :

$$H_{\mathcal{Q}}\psi_n = \lambda_n\psi_n.$$

Les valeurs propres λ_n peuvent être caractérisées par l'équation séculaire introduite par Kottos et Smilanski [KS97]. On introduit les matrices $|B| \times |B|$ suivantes, dont les lignes et les colonnes sont indexées par les éléments de B :

$$\begin{aligned} D(z)_{b,b'} &= \delta_{b,b'} e^{ikL_b}, \\ S_{b,b'} &= \begin{cases} \frac{2}{d(v)} & \text{si } o_b = t_{b'} = v \text{ et } b' \neq \hat{b} \\ \frac{2}{d(v)} - 1 & \text{si } b' = \hat{b} \text{ et } o_b = v \\ 0 & \text{si } o_b \neq t_{b'}, \end{cases} \\ U_{\mathcal{Q}}(z) &= SD(z). \end{aligned} \quad (2.5)$$

On peut alors montrer que, pour tout $k \neq 0$,

$$k^2 \text{ est une valeur propre } \iff \det(\text{Id} - U_{\mathcal{Q}}(k)) = 0, \quad (2.6)$$

et les multiplicités coïncident. Si $\vec{a} = (a_b)_{b \in B}$ est un vecteur tel que $U_{\mathcal{Q}}(k)\vec{a} = \vec{a}$, alors la fonction propre de $H_{\mathcal{Q}}$ associée s'écrit $f = (f_b)$ avec $f_b(x) = a(b)e^{ikx} + a(\hat{b})e^{ik(L_b-x)}$.

Dans la suite, je discuterai de résultats ne concernant pas le spectre d'un seul graphe quantique, mais d'une suite de graphes (typiquement, de plus en plus grands) ; pour cela, je dois introduire une notion de convergence, la convergence de Benjamini-Schramm.

2.2 Convergence de Benjamini-Schramm

La convergence de Benjamini-Schramm a initialement été introduite dans [BS11], pour les graphes discrets. Cette notion a ensuite été généralisée à de nombreux autres cadres : convergence de variétés avec ou sans bord, de fonctions propres du laplacien... Pour les graphes quantiques, la première définition a été donnée dans [AISW21b].

Un graphe quantique *enraciné* $(\mathcal{Q}, b_0) = (V, E, L, b_0)$ sera la donnée d'un graphe quantique $\mathcal{Q} = (V, E, L)$ et d'une arête orientée¹ $b_0 \in B(\mathcal{Q})$.

1. Il existe d'autres définitions possibles d'un graphe quantique enraciné, où la racine peut être un sommet, ou un point d'une arête. Il est en général aisé de passer d'une définition à l'autre.

On notera \mathbb{RQ} l'ensemble des graphes quantiques enracinés, que l'on quotiente en identifiant $(\mathcal{Q}_0, b_0) = (V_0, E_0, L_0, b_0)$ et $(\mathcal{Q}_1, b_1) = (V_1, E_1, L_1, b_1)$ s'il existe un isomorphisme de graphes² $\phi : (V_0, E_0) \longrightarrow (V_1, E_1)$ tel que $\phi(o_{b_0}) = o_{b_1}$, $\phi(t_{b_0}) = t_{b_1}$, $L_1 \circ \phi = L_0$. La classe d'équivalence de (\mathcal{Q}, b) sera notée $[\mathcal{Q}, b]$.

Si $v \in V$ est un sommet d'un graphe et $r \in \mathbb{N}$, on note $B_G(v, r)$ l'ensemble des points à une distance combinatoire au plus r de v . On note $E(B_G(v, r))$ l'ensemble des arêtes de E joignant deux sommets de $B_G(v, r)$.

On peut définir une distance sur \mathbb{RQ} de la manière suivante :

$$d([\mathcal{Q}_1, b_1], [\mathcal{Q}_2, b_2]) := \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \exists \phi : B_{G_1}(o_{b_1}, \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor) \rightarrow B_{G_2}(o_{b_2}, \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor) \right. \\ \left. \text{isomorphisme de graphes tel que } \sup_{e \in E(B_{G_1}(o_{b_1}, \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor))} |L_2(\phi(e)) - L_1(e)| < \varepsilon \right\}.$$

L'espace (\mathbb{RQ}, d) est alors un espace polonais (un espace séparable métrique complet). On notera $\mathcal{C}(\mathbb{RQ})$ l'ensemble des fonctions continues sur cet espace, et $\mathcal{P}(\mathbb{RQ})$ l'espace des mesures de probabilités boréliennes sur \mathbb{RQ} .

Tout graphe quantique fini $\mathcal{Q} = (V, E, L)$ induit une mesure de probabilité $\nu_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{P}(\mathbb{RQ})$, donnée en choisissant la racine uniformément au hasard :

$$\nu_{\mathcal{Q}} := \frac{1}{|B(\mathcal{Q})|} \sum_{b_0 \in B(\mathcal{Q})} \delta_{[\mathcal{Q}, b_0]}.$$

On dit qu'une suite de graphes quantiques (\mathcal{Q}_N) converge au sens de Benjamini-Schramm vers une mesure $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{RQ})$ si $(\nu_{\mathcal{Q}_N})$ converge faiblement vers \mathbb{P} , c'est-à-dire si, pour tout $F \in \mathcal{C}(\mathbb{RQ})$ bornée, on a $\mathbb{E}_{\nu_{\mathcal{Q}_N}}[F] \longrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[F]$.

Remarquons que, lorsqu'on considère une famille de graphes bornée au sens de (2.1), la convergence de Benjamini-Schramm est très naturelle. En effet, on peut montrer aisément que l'ensemble \mathbb{RQ} des (classes d'équivalence de) graphes enracinés $[\mathcal{Q}, b]$ tels que \mathcal{Q} vérifie (2.1) est compact. On déduit donc du théorème de Prokhorov que, si (\mathcal{Q}_N) est une suite de graphes quantiques dans $\mathfrak{Q}_{D, L_{min}, L_{max}}$, alors on peut toujours extraire une sous-suite qui converge au sens de Benjamini-Schramm.

Remarquons de plus que, même dans des cas simples comme celui de la Figure 2.1, la limite n'est pas une simple mesure de Dirac : une suite de graphes ne converge donc pas au sens de Benjamini-Schramm vers un graphe, mais bien vers une mesure sur l'ensemble des graphes.

Des exemples de fonctionnelles $F \in \mathcal{C}(\mathbb{RQ})$ sont : la longueur de la racine b , le degré de o_b , le nombre de cycles inclus dans $B_G(o_b, 10)$... Ces fonctionnelles dépendent toutes du graphe dans un voisinage fini du graphe. En revanche, les quantités spectrales ne sont a priori pas des quantités locales : par exemple, les fonctions propres peuvent être délocalisées sur tout le graphe. Il est donc remarquable que la convergence de Benjamini-Schramm ait des conséquences spectrales, comme expliqué dans la section suivante.

2. C'est-à-dire une application bijective entre (V_0, E_0) et (V_1, E_1) envoyant les sommets V_0 sur les sommets V_1 , et envoyant les arêtes reliant les sommets de V_0 sur les arêtes reliant les sommets de V_1 correspondants.

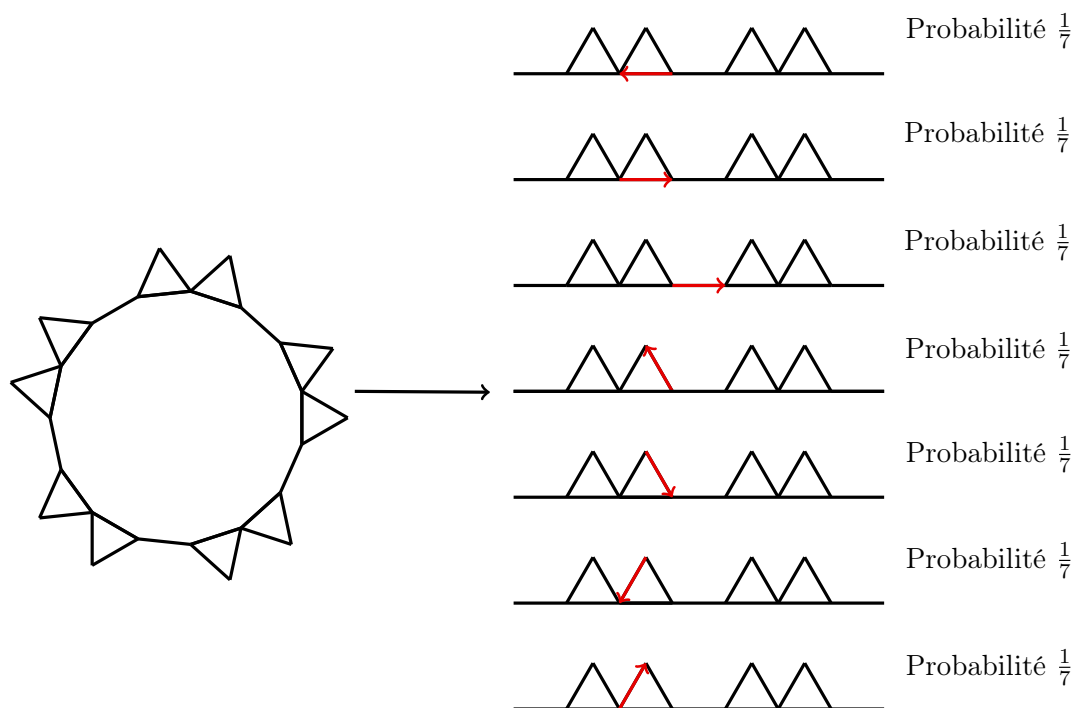


FIGURE 2.1 – Le graphe de gauche, en forme de « fleur », converge, lorsque le nombre de pétales tend vers l'infini, vers la mesure décrite à droite. En particulier, la limite n'est pas une mesure de Dirac.

2.2.1 Convergence de Benjamini-Schramm et mesures spectrales empiriques

Si \mathcal{Q} est un graphe quantique fini, on note $\mathcal{L}(\mathcal{Q}) = \sum_{e \in E} L_e$ sa longueur totale, et $\sigma(\mathcal{Q})$ son spectre. La *mesure spectrale empirique* de \mathcal{Q} est alors définie par

$$\mu_{\mathcal{Q}} := \frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{Q})} \sum_{\lambda \in \sigma(\mathcal{Q})} \delta_{\lambda}.$$

Le résultat principal de [AISW21b] est que la convergence de Benjamini-Schramm implique la convergence des mesures spectrales empiriques :

Théorème 1 [AISW21b] *Soit $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}\mathbb{Q})$. Il existe $\mu_{\mathbb{P}}$, mesure borélienne sur \mathbb{R} , telle que, si (\mathcal{Q}_N) est une suite de graphes quantiques dans $\mathfrak{Q}_{D, L_{min}, L_{max}}$ convergeant au sens de Benjamini-Schramm vers \mathbb{P} , alors $\mu_{\mathcal{Q}_N}$ converge vaguement vers $\mu_{\mathbb{P}}$.*

Autrement dit, pour tout $\chi \in C_c(\mathbb{R})$, on a

$$\frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{Q}_N)} \sum_{\lambda \in \sigma(\mathcal{Q}_N)} \chi(\lambda) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \chi(\lambda) d\mu_{\mathbb{P}}(\lambda).$$

La mesure $d\mu_{\mathbb{P}}(\lambda)$ peut être décrite de la manière suivante. Si $\chi \in C_c(\mathbb{R})$ et si $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{D, L_{min}, L_{max}}$, alors le théorème spectral permet de définir l'opérateur $\chi(H_{\mathcal{Q}})$. On considère le noyau intégral $(\chi(H_{\mathcal{Q}}))(x, y)$, où x et y appartiennent au « graphe continu » $\{(b, x_b); b \in B_{\mathcal{Q}}, x_b \in]0, L_b[\}$. On peut alors montrer que le noyau $(\chi(H_{\mathcal{Q}}))(x, y)$ est continu, y compris sur la diagonale, et on a

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(\lambda) d\mu_{\mathbb{P}}(\lambda) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\int_0^{L_{b_0}} (\chi(H_{\mathcal{Q}}))(x_{b_0}, x_{b_0}) dx_{b_0} \right].$$

La mesure \mathbb{P} étant sur l'ensemble $\mathbb{R}\mathbb{Q}$ des (classes d'équivalence de) graphes enracinés $[\mathcal{Q}, b_0]$ le membre de droite doit être pensé comme une somme pondérée sur l'ensemble des graphes \mathcal{Q} et de leurs arêtes orientées b_0 .

Remarque 1 *Le résultat de [AISW21b] est beaucoup plus général, permettant de traiter des conditions aux limites en chaque sommet différentes de celles de Kirchhoff, et des opérateurs de Schrödinger plus généraux que le laplacien sur chaque arête. En particulier, en présence d'un potentiel sur les arêtes, le spectre ne peut plus être caractérisé simplement par (2.6).*

Remarquons que des résultats analogues au Théorème 1 existent dans le cas de suites de graphes discrets (où la preuve est alors élémentaire, voir [ATV13]), ou pour des suites de variétés riemanniennes [ABB⁺17].

2.2.2 Éléments de démonstration

Si (\mathcal{Q}, b_0) est un graphe quantique enraciné, on considère pour $\Im z > 0$ la fonction de Green $G_{z,b_0} : x \mapsto (H_{\mathcal{Q}} - z)^{-1}(o_{b_0}, x)$. Cette fonction vérifie $(H_{\mathcal{Q}} - z)G_{z,b_0} = 0$ et les conditions de Kirchhoff (2.3) partout, sauf au sommet o_{b_0} . Ainsi, sur chaque arête $[0, L_b]$, on peut écrire $G_{z,b_0} = a(b_{b_0})e^{i\sqrt{z}x_{b_0}} + a(\hat{b}_{b_0})e^{i\sqrt{z}(L_{b_0}-x_{b_0})}$.

Si l'on note \vec{a}_{z,b_0} le vecteur des coefficients $a(b)$, on peut montrer que l'on a

$$(\text{Id} - U_{\mathcal{Q}}(z))\vec{a}_{z,b_0} = \vec{\xi}_{b_0},$$

où $\vec{\xi}_{b_0}(b) = \frac{1}{i\sqrt{z}d(o_{b_0})}\delta_{o_b=o_{b_0}}$, et où $U_{\mathcal{Q}}(z)$ est comme dans (2.5). En remarquant que $\|U_{\mathcal{Q}}(z)\| < 1$ lorsque $\Im z > 0$, on déduit que

$$\vec{a}_{z,b_0} = (\text{Id} - U_{\mathcal{Q}}(z))^{-1}\vec{\xi}_{b_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} (U_{\mathcal{Q}}(z))^n \vec{\xi}_{b_0}.$$

Ici, la somme converge absolument, et chaque terme ne dépend que des propriétés de \mathcal{Q} dans un voisinage de o_{b_0} . On en déduit que $G_{z,b_0}(o_{b_0}) : \mathbb{R}\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, lorsqu'on la considère sur l'ensemble des graphes vérifiant (2.1). Le même genre d'argument permet de déduire la continuité de $\int_0^{L_b} (H_{\mathcal{Q}} - z)^{-1}(x_{b_0}, x_{b_0})dx_{b_0}$.

Des extensions presque analytiques de χ , dans l'esprit de la formule de Helffer-Sjöstrand, permettent ensuite d'exprimer $\frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{Q}_N)} \sum_{\lambda \in \sigma(\mathcal{Q}_N)} \chi(\lambda)$ et $\sum_{b_0 \in B(\mathcal{Q})} \int_0^{L_{b_0}} (\chi(H_{\mathcal{Q}}))(x_{b_0}, x_{b_0})dx_{b_0}$ en fonction de $\sum_{b_0 \in B(\mathcal{Q})} \int_0^{L_{b_0}} (H_{\mathcal{Q}} - z)^{-1}(x_{b_0}, x_{b_0})dx_{b_0}$. L'hypothèse de convergence de Benjamini-Schramm permet alors de conclure.

Lorsque l'on considère un opérateur de Schrödinger plus général que le laplacien, ou des conditions aux limites plus générales que celles de Kirchhoff, la démonstration est beaucoup moins élémentaire : il est encore possible de s'appuyer sur un analogue de (2.6), mais avec $U_{\mathcal{Q}}(z) = S(z)D(z)$ pour des matrices $S(z)$ et $D(z)$ ayant une dépendance beaucoup plus compliquée en z .

2.3 Ergodicité quantique sur les graphes quantiques

Après avoir discuté du comportement asymptotique des valeurs propres de grands graphes quantiques, il est naturel de discuter du comportement asymptotique des fonctions propres. Plusieurs régimes asymptotiques peuvent être étudiés :

- Sur un graphe quantique fixé, on peut s'intéresser au comportement à haute fréquence des fonctions propres. C'est le cadre de [CdV15], où les mesures semiclassiques sont décrites explicitement pour un graphe ayant des longueurs génériques et des conditions de Kirchhoff aux sommets. En particulier, lorsque le graphe n'est pas homéomorphe à un intervalle ou un cercle, la mesure semiclassique n'est pas unique, et il n'y a pas d'ergodicité quantique. (voir aussi [?], où les premiers résultats de ce genre sont obtenus dans le cas des graphes étoilés, et [BW18] pour des résultats de localisation plus précis).

- Il est aussi possible de regarder d’abord le régime des hautes fréquences, puis de faire tendre la taille du graphe vers l’infini : il est alors possible d’obtenir des résultats de délocalisation des fonctions propres, qualifiés d’*ergodicité quantique asymptotique*. Des résultats de localisation ou de délocalisation asymptotique de ce genre ont été obtenus dans [BKW04, BKS07, BW10, KR14, BW16].
- Enfin, il est possible de considérer une suite de graphes de plus en plus grands, mais de ne regarder que les fonctions propres correspondant aux valeurs propres dans un intervalle fixé : c’est ce qui a été fait dans [ISW20, AISW21c].

Pour décrire les résultats de [ISW20, AISW21c], il me faut d’abord introduire quelques notations.

2.3.1 Notations

Si $G = (V, E)$ est un graphe (discret) fini, la matrice d’adjacence de G est l’opérateur \mathcal{A}_G agissant sur $\ell^2(V)$ par $(\mathcal{A}_G f)(v) = \sum_{w \sim v} f(w)$, où $v \sim w$ signifie que v et w sont reliés par une arête.

On dit que (V_N, E_N) forment une famille de *graphes expanseurs* s’il existe $\beta > 0$ (indépendant de N) tel que, pour tout N ,

$$\sigma\left(\frac{1}{d_N} \mathcal{A}_{G_N}\right) \subset [-1 + \beta, 1 - \beta] \cup \{1\}, \quad (2.7)$$

où d_N est l’application degré sur le graphe (V_N, E_N) .

On dit que les graphes (V_N, E_N) sont *d-réguliers* s’il existe $d \in \mathbb{N}$ (indépendant de N) tel que $d(v) = d$ pour tout $v \in V_N$ et tout $N \in \mathbb{N}$.

De même, on dira que les graphes quantiques (V_N, E_N, L_N) sont *L-équilatéraux* si, pour tout N et tout $e \in E_N$, on a $L(e) = L$.

Si $G = (V, E)$ est un graphe fini et si $v \in V$, le *rayon d’injectivité* autour de v , noté $\rho(v)$ est le rayon de la plus grande boule autour de v ne contenant pas de cycle. Autrement dit, $\rho(v)$ est le plus grand entier tel que $B(v, \rho(v))$ est isomorphe à un arbre.

On dira qu’une suite (V_N, E_N) a *peu de cycles courts*, si pour tout $r > 0$, on a

$$\frac{\#\{v \in V_N; \rho(v) < r\}}{|V_N|} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

où $\rho(v)$ est le rayon d’injectivité autour de v . Cela est équivalent à dire que, pour toute sous-suite (V_{N_n}, E_{N_n}) convergeant au sens de Benjamini-Schramm, la limite est une mesure de probabilité supportée sur l’ensemble des arbres.

Si \mathcal{Q} est un graphe quantique, l’espace $\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}$ introduit dans (2.2) est naturellement équipé d’une structure d’espace de Hilbert, et on notera $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}}}$ le produit scalaire associé (correspondant à intégrer $f\bar{g}$ sur l’ensemble des arêtes), divisé par la longueur totale du graphe, de sorte que si $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1, on a $\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = 1$.

2.3.2 Le cas des graphes équilatéraux réguliers

Théorème 2 [ISW20] Soit $d \geq 3$ et $L > 0$. Notons $\theta := \arccos\left(\frac{2\sqrt{d-1}}{d}\right) \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Soit $(\mathcal{Q}_N) = ((V_N, E_N, L))$ une suite de graphes quantiques d -réguliers, L -équilatéraux, ayant peu de cycles courts et formant une suite de graphes *expanseurs*.

Soit $(\psi_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale de fonctions propres de $H_{\mathcal{Q}_N}$. Soit $k \geq 1$, et soit I un intervalle tel que

$$\bar{I} \subset \left[\left(\frac{(k-1)\pi + \theta}{L} \right)^2, \left(\frac{k\pi - \theta}{L} \right)^2 \right]. \quad (2.8)$$

Pour toute suite de fonctions $a_N \in \mathcal{H}_{\mathcal{Q}_N}$ vérifiant $|a_N(x)| \leq 1$ pour tout x , on a

$$\frac{1}{\#\{\lambda_n^{(N)} \in I\}} \sum_{\lambda_n^{(N)} \in I} \left| \langle \psi_n^{(N)}, a_N \psi_n^{(N)} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}_N}} - \langle \mathbf{1}, a_N \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}_N}} \right|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad (2.9)$$

où $\mathbf{1} \in \mathcal{H}_{\mathcal{Q}_N}$ est la fonction constante égale à 1.

Commentaire sur les hypothèses du Théorème 2. Ce résultat peut être vu comme un analogue pour les graphes quantiques équilatéraux des résultats pour les graphes discrets réguliers de [AM15, Ana17]; ces résultats nécessitent également que les graphes (V_N, E_N) soient *expanseurs*, et aient peu de cycles courts. Ces hypothèses sont vérifiées avec grande probabilité lorsque (V_N, E_N) est choisi uniformément au hasard parmi les graphes d -réguliers à N sommets; il existe également des familles explicites de graphes vérifiant ces hypothèses (voir l'introduction de [AM15] pour des références démontrant ces faits). Lorsque l'hypothèse d'expansivité ou celle de convergence de Benjamini-Schramm n'est pas vérifiée, le résultat d'ergodicité quantique n'est en général pas vrai (pour le cas des graphes discrets), comme montré dans [?].

Les hypothèses du Théorème 2 impliquent que la suite (\mathcal{Q}_N) converge au sens de Benjamini-Schramm vers un singleton, correspondant à l'arbre d -régulier L -équilatéral, noté ici $\mathbb{T}_{d,L}$. Grâce au Théorème 1, on sait que le spectre de (\mathcal{Q}_N) va s'accumuler sur le spectre de $\mathbb{T}_{d,L}$. On peut montrer (voir [Car97]) que le spectre de $\mathbb{T}_{d,L}$ est composé de spectre ponctuel et de spectre absolument continu, avec

$$\sigma_{pp}(\mathbb{T}_{d,L}) = \left\{ \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad \sigma_{ac}(\mathbb{T}_{d,L}) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{(k-1)\pi + \theta}{L} \right)^2, \left(\frac{k\pi - \theta}{L} \right)^2 \right].$$

L'hypothèse sur l'intervalle I revient donc à se placer dans le spectre absolument continu de « l'opérateur limite », ou encore à éviter le spectre purement ponctuel. Au niveau des graphes finis \mathcal{Q}_N , cette hypothèse revient à éviter les valeurs propres ayant une grande dégénérescence spectrale, due au caractère équilatéral des graphes.

Remarque 2 Le résultat du Théorème 2 est un analogue du théorème d'ergodicité quantique de [Shn74, Zel87, CDV85], affirmant que si (X, g) est une variété riemannienne sans bord dont le flot géodésique est ergodique dont les valeurs propres et les

fonctions propres du laplacien sont notées λ_n et ϕ_n , on a pour tout $0 < \alpha < \beta$:

$$\frac{1}{N_{\alpha,\beta}(\lambda)} \sum_{\lambda_n \in [\alpha\lambda, \beta\lambda]} \left| \int_X a(x) |\phi_n|^2(x) dx - \int_X a(x) dx \right|^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0, \quad (2.10)$$

où $N_{\alpha,\beta}(\lambda)$ est le nombre de λ_n dans $[\alpha\lambda, \beta\lambda]$.

Ce résultat est souvent reformulé de la manière suivante : il existe une sous-suite n_k de densité 1 telle que, pour tout $a \in C(X)$, on a

$$\int_X a(x) |\phi_{n_k}|^2(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_X a(x) dx. \quad (2.11)$$

Pour passer de (2.10) à (2.11), on peut utiliser un procédé d'extraction diagonale, car $C(X)$ est séparable. Il n'est pas possible de déduire simplement une formulation de (2.9) directement analogue à (2.11) : la sous-suite de densité 1 devra dépendre de la suite d'observables a_N considérée, car l'espace des suites d'observables n'est pas séparable.

Remarque 3 Les théorèmes de [ISW20] sont plus généraux que le Théorème 2. D'une part, la quantité $a_N \psi_n^{(N)}$, correspondant à un opérateur de multiplication agissant sur $\psi_n^{(N)}$, peut être remplacée par $K_N \psi_n^{(N)}$, où K_N est un opérateur tel que $K_N \psi_n^{(N)}(x)$ ne dépend de $\psi_n^{(N)}$ que sur un voisinage de taille finie de x . De tels opérateurs « locaux » peuvent être vues comme un analogue des opérateurs pseudo-différentiels pouvant remplacer $a(x)$ dans (2.10).

D'autre part, il est possible de considérer des opérateur de Schrödinger plus généraux que le laplacien, et des conditions aux limites plus générales que celles de Kirchhoff. Dans ce cas, la densité limite des fonctions propres n'est plus constante sur les arêtes : la quantité $\langle \mathbf{1}, a_N \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}_N}}$ doit être remplacée par une quantité plus compliquée, faisant intervenir la fonction de Green de l'arbre limite.

Cette nécessité de remplacer $\langle \mathbf{1}, a_N \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}_N}}$ par une quantité plus complexe se retrouve dans le cas non-homogène, où les graphes ne sont pas réguliers et équilatéraux : c'est ce cadre général, considéré dans [AISW21c], que je vais maintenant présenter.

2.3.3 Le cas non homogène

Les résultats de [AISW21c] sont une généralisation du Théorème 2 au cas de graphes non réguliers, et non équilatéraux. De même que les résultats de [ISW20] peuvent être vus comme une adaptation des résultats sur les graphes discrets de [AM15, Ana17] au cadre des graphes quantiques, les résultats de [AISW21c] sont analogues au résultats de [AS19] sur les graphes discrets non réguliers.

Hypothèses sur les graphes Expliquons comment chacune des hypothèses du Théorème 2 peut être généralisée. L'hypothèse que les graphes \mathcal{Q}_N sont équilatéraux

et réguliers sera remplacée par l'hypothèse qu'il existe $D \in \mathbb{N}$ et $0 < L_{min} \leq L_{max}$ tels que

$$\text{Pour tout } N \in \mathbb{N}, \text{ on a } \mathcal{Q}_N \in \mathfrak{Q}_{D, L_{min}, L_{max}}. \quad (2.12)$$

L'hypothèse qu'il y ait peu de cycles courts se traduit ici par

Il existe $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{RQ})$ telle que (\mathcal{Q}_N) converge au sens de Benjamini-Schramm vers \mathbb{P} . (2.13)

L'hypothèse (2.8) joue deux rôles dans le Théorème 2 : d'une part, elle garantit qu'aucune fonction propre ne s'annule aux deux extrémités d'une arête. D'autre part, elle permet de ne travailler que dans le spectre absolument continu de l'opérateur limite, où la résolvante est bien contrôlée.

Ces deux hypothèses doivent être séparées dans le cadre non-homogène. D'une part, on suppose que

$$\exists c_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \forall e \in E_N, \forall \lambda \in I, \text{ on a } |\sin(\lambda L(e))| > c_0. \quad (2.14)$$

L'hypothèse de spectre absolument continue est plus difficile à énoncer, car on a besoin d'un contrôle quantitatif de la résolvante. Si $\Im \gamma > 0$, on note $G_{\mathcal{Q}}^{\gamma}(x, y)$ le noyau intégral de la résolvante. On définit alors, pour tout $b \in B$,

$$\zeta_{\mathcal{Q}}^{\gamma}(b) := \frac{G_{\mathcal{Q}}^{\gamma}(o_b, t_b)}{G_{\mathcal{Q}}^{\gamma}(o_b, o_b)}. \quad (2.15)$$

Lorsque $\mathcal{Q} = (V, E, L)$ est un arbre quantique, on peut montrer qu'il existe des fonctions $R_{\gamma}^{\pm} : V \rightarrow \mathbb{C}$, avec $\Im R^{\pm} \geq 0$ telles que

$$\zeta^{\gamma}(b) = \cos(\sqrt{\gamma}L_b) + \frac{R_{\gamma}^{+}(o_b)}{\sqrt{\gamma}} \sin(\sqrt{\gamma}L_b), \quad \zeta^{\gamma}(\hat{b}) = \cos(\sqrt{\gamma}L_b) + \frac{R_{\gamma}^{-}(t_b)}{\sqrt{\gamma}} \sin(\sqrt{\gamma}L_b).$$

Ces fonctions sont appelées *fonctions de Weyl-Titchmarch*, et peuvent être définies de nombreuses manières équivalentes. On fera l'hypothèse suivante, portant sur l'intervalle I et sur la mesure \mathbb{P} introduite dans (2.13) :

$$\forall s > 0, \sup_{\lambda \in I, \eta \in (0,1)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\left| R_{\lambda+i\eta}^{\pm}(o_b) \right|^s \right) < \infty, \quad \sup_{\lambda \in I, \eta \in (0,1)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\left| \Im R_{\lambda+i\eta}^{\pm}(o_b) \right|^{-s} \right) < \infty. \quad (2.16)$$

Des exemples de mesures \mathbb{P} vérifiant (2.16) ont été donnés dans [AISW21a]; ces exemples incluent de petites perturbations aléatoires des longueurs d'un arbre quantique équilatéral régulier, ou encore des revêtements universels de graphes quantiques finis. Il a été montré dans [AISW21a, Théorème A.6] que (2.16) implique que \mathbb{P} -presque tous les arbres quantiques ont du spectre absolument continu dans I .

Théorème 3 ([AISW21c]) *Soit (\mathcal{Q}_N) une suite de graphes quantiques, et soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, tels que (2.7), (2.12), (2.13), (2.14) et (2.16) soient vérifiées.*

Soit I_1 un intervalle tel que $\overline{I_1} \subset \mathring{I}$. Soit $(\psi_j^{(N)})_{j \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale de fonctions propres de $H_{\mathcal{Q}_N}$, associées à des valeurs propres $\lambda_j^{(N)}$. Alors, pour toute suite de fonctions $a_N \in \mathcal{H}_{\mathcal{Q}_N}$ vérifiant $|a_N(x)| \leq 1$ pour tout x , on a

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\{\lambda_n^{(N)} \in I_1\}} \sum_{\lambda_j^{(N)} \in I_1} \left| \langle \psi_j^{(N)}, a_N \psi_j^{(N)} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}_N}} - \langle a_N \rangle_{\gamma_j^{(N)}} \right| = 0, \quad (2.17)$$

où

$$\langle a_N \rangle_{\gamma_j} = \frac{\langle a_N, \Im G_{\mathcal{Q}}^{\gamma_j} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}_N}}}{\langle \mathbf{1}, \Im G_{\mathcal{Q}}^{\gamma_j} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}_N}}}, \quad (2.18)$$

avec $\gamma_j = \gamma_j^{(N)} := \lambda_j^{(N)} + i\eta$, et $G_{\mathcal{Q}}^{\gamma}(x) := G_{\mathcal{Q}}^{\gamma}(x, x)$ désignant la fonction de Green sur le revêtement universel, évaluée sur la diagonale.

On peut montrer à l'aide de l'hypothèse (2.16) qu'il existe $c > 0$ telle que, si $a_N \geq 0$,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \langle a_N \rangle_{\gamma_j^{(N)}} \geq \frac{c}{N} \left(\langle \sqrt{a_N}, \mathbf{1} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}_N}} \right)^2.$$

En particulier, si a_N est la fonction indicatrice d'un ensemble d'arêtes de cardinal $\alpha|E_N|$, avec $\alpha \in]0, 1[$, on a $\liminf_{N \rightarrow \infty} \langle a_N \rangle_{\gamma_j^{(N)}} > 0$. Ainsi, le Théorème 3 est bien un résultat d'équidistribution des fonctions propres : pour la plupart des fonctions propres $\psi_j^{(N)}$, on ne peut pas avoir $|\psi_j^{(N)}|^2$ qui se concentre sur un ensemble d'arêtes de cardinal $o(|E_N|)$.

2.3.4 Idées de la démonstration

La preuve du Théorème 3 est particulièrement technique, et je n'en donnerai que les grandes lignes, utilisant le signe imprécis \approx lorsque deux termes sont égaux à un petit reste près (devant souvent être contrôlé à l'aide de (2.16)).

Évolutions et variances sans recul. On notera $b \rightsquigarrow b'$ si $t_b = o_{b'}$ et $b' \neq \hat{b}$. On introduit l'opérateur d'évolution sans recul, agissant sur \mathbb{C}^{B_N} par

$$(\mathcal{B}K)(b) := \sum_{b' \in B_N; b \rightsquigarrow b'} K(b'). \quad (2.19)$$

On définit alors (pour $\eta > 0$) les fonctions

$$f_{j,N,\eta}(b) := \frac{\psi_j^{(N)}(t_b)}{\sin(\sqrt{\lambda_j^{(N)}} L_b)} - \frac{\zeta_{\mathcal{Q}_N}^{\lambda_j^{(N)} + i\eta}(b) \psi_j^{(N)}(o_b)}{\sin(\sqrt{\lambda_j^{(N)}} L_b)}, \quad f_{j,N,\eta}^*(b) := f_{j,N,\eta}(\hat{b}),$$

qui vérifient

$$\mathcal{B}f_{j,N,\eta}(b) \approx \frac{1}{\zeta_{\mathcal{Q}_N}^{\lambda_j^{(N)} + i\eta}(b)} f_{j,N,\eta}(b). \quad (2.20)$$

Cette construction, introduite dans [AS19], permet d'exploiter pleinement le fait que les (\mathcal{Q}_N) aient peu de cycles courts : en effet, on remplace des fonctions propres du laplacien par des quasi-vecteurs propres de l'opérateur \mathcal{B} , opérateur dont les puissances seront particulièrement simples à estimer grâce au fait qu'il y a peu de cycles courts.

Pour tirer pleinement partie de cette remarque, on introduit les *variances sans recul*

$$\text{Var}_{\text{nb}, I_1, \eta}(K) := \frac{1}{\#\{\lambda_j^{(N)} \in I_1\}} \sum_{\lambda_j^{(N)} \in I_1} |\langle f_{j,N,\eta}^*, K_{\lambda_j^{(N)} + i\eta} f_{j,N,\eta} \rangle|. \quad (2.21)$$

Dans l'expression (2.21), $K = K_z$ peut dépendre de $z \in \mathbb{C}$ et peut être un élément de \mathbb{C}^{B_N} , ou, plus généralement, de $\mathbb{C}^{B_{k,N}}$, où $B_{k,N}$ est l'ensemble des $(b_1, \dots, b_k) \in B_N^k$ tels que $b_1 \rightsquigarrow b_2 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow b_k$.³ Le produit scalaire apparaissant dans (2.21) est alors donné par

$$\langle f_{j,N,\eta}^*, K f_{j,N,\eta} \rangle := \sum_{(b_1, \dots, b_k) \in B_{k,N}} \overline{f_{j,N,\eta}^*(b_1)} K(b_1, \dots, b_k) f_{j,N,\eta}(b_k).$$

On peut alors montrer que les quantités

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\{\lambda_n^{(N)} \in I_1\}} \sum_{\lambda_j^{(N)} \in I_1} \left| \langle \psi_j^{(N)}, a_N \psi_j^{(N)} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{Q}_N}} - \langle a_N \rangle_{\gamma_j^{(N)}} \right|$$

peuvent être contrôlées en terme de $\text{Var}_{\text{nb}, I_1, \eta}(K)$, pour des K bien choisis.

Invariance des variances sans recul. On définit des opérateurs $\mathcal{R}_n^z : \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^{B_{k,N}} \rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{C}^{B_{k+n,N}}$ par

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_n^z K)(b_1, \dots, b_{k+n}) &= \frac{1}{n} K(b_1, \dots, b_k) \zeta^z(b_k) \dots \zeta^z(b_{k+n-1}) \\ &+ \frac{1}{n} \overline{\zeta^z(\widehat{b_2})} K(b_2, \dots, b_{k+1}) \zeta^z(b_k) \dots \zeta^z(b_{k+n-1}) + \dots \\ &+ \frac{1}{n} \overline{\zeta^z(\widehat{b_2})} \dots \overline{\zeta^z(\widehat{b_n})} K(b_n, \dots, b_{n+k-1}). \end{aligned}$$

On peut montrer, en utilisant (2.20), que⁴ $\text{Var}_{\text{nb}, I_1, \eta}(K) \approx \text{Var}_{\text{nb}, I_1, \eta}(\mathcal{R}_n^z K)$. L'objectif de la preuve est donc de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\eta \downarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}_{\text{nb}, I_1, \eta}(\mathcal{R}_n^z K) = 0$$

pour tout $K = K_z \in \mathbb{C}^{B_{k,N}}$, où K peut dépendre de z de façon lisse.

3. Un élément $K \in \mathbb{C}^{B_{k,N}}$ agit sur $f \in \ell^2(B)$ par $Kf(b_1) = \sum_{(b_1, \dots, b_k) \in B_{k,N}} K(b_1, \dots, b_k) f(b_k)$. Lorsque $k = 1$, K est donc simplement un opérateur de multiplication : $(Kf)(b) = K(b)f(b)$.

4. L'opérateur \mathcal{R}_n^z peut être pensé comme un opérateur de moyennisation de l'évolution temporelle sur un temps n , un peu comme dans la preuve du théorème d'ergodicité quantique de Shnirelman. Néanmoins, la dynamique ici présente est sur les chemins orientés de longueur n , et a un caractère probabiliste : l'évolution d'un chemin (b_1, \dots, b_n) sera une mesure de probabilité sur les chemins (b_2, \dots, b_{n+1}) qui le suivent. L'opérateur \mathcal{R}_n^z présente donc aussi des analogies avec un opérateur de diffusion.

Une expression intégrale pour la variance. On montre ensuite que, pour tout $K = K_z \in \mathbb{C}^{B_{k+n,N}}$, on a

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} |\text{Var}_{\text{nb}, I_1, \eta}(K_z)|^2 \leq \lim_{\eta \downarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} C \int_{I_1} \sum_{(b_1, \dots, b_{k+n}) \in B_{k+n, N}} |K_{\lambda+i\eta}(b_1, \dots, b_{k+n})|^2 d\lambda, \quad (2.22)$$

avec C indépendante de k .

Pour obtenir (2.22), on commence par utiliser la formule de Helffer-Sjöstrand pour exprimer $|\text{Var}_{\text{nb}, I_1}(K_z)|^2$ comme une intégrale de contour dont les pôles sont les valeurs propres $\lambda_j^{(N)}$ (ici, on considère une extension quasi-analytique de K_z). Il est ensuite possible de faire tendre $N \rightarrow +\infty$ dans l'intégrale, en utilisant la convergence de Benjamini-Schramm : l'intégrale fait alors intervenir la résolvante sur un arbre. Enfin, des relations sur la résolvante sur un arbre quantique permettent d'éliminer les termes non-diagonaux dans l'expression.

A l'aide du théorème de convergence dominée, on peut faire tendre n vers l'infini dans (2.22). On voit alors que, pour prouver le théorème, il faut montrer que pour tout $\lambda \in I_1$ et tout $K \in \mathbb{C}^{B_{k,N}}$ (dépendant de manière contrôlée de z), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\eta \downarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(b_1, \dots, b_{k+n}) \in B_N^{k+n}} |\mathcal{R}_n^{\lambda+i\eta} K_{\lambda+i\eta}(b_1, \dots, b_{k+n})|^2 = 0. \quad (2.23)$$

Opérateurs d'évolution En utilisant les identités vérifiées par la résolvante sur les arbres, on peut montrer que la quantité (2.23) peut se réécrire (à des termes négligeables près), comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\eta \downarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \langle K_1, \mathcal{S}_{u^{\lambda+i\eta}}^j K_2 \rangle_{\ell^2(B_N)}, \quad (2.24)$$

où $K_1, K_2 \in \mathbb{C}^{B_N}$ sont des fonctions construites à partir de K , dont les coefficients sont bien contrôlés, et

$$\mathcal{S}_{u^z} := M_{u^z} \mathcal{S}_z,$$

où M_{u^z} est l'opérateur de multiplication par $u^z(b) := \frac{\overline{\zeta^z(b)}}{\zeta^z(b)}$, et où

$$(\mathcal{S}_z K)(b) = \frac{|\zeta^\gamma(b)|^2}{\Im R_\gamma^+(o_b)} \sum_{b \rightsquigarrow b'} \Im R_z^+(o_{b'}) K(b').$$

Pour montrer le théorème, il faudra donc étudier les propriétés de contraction des opérateurs d'évolution $\mathcal{S}_{u^{\lambda+i\eta}}^j$.

Contraction des opérateurs d'évolution L'opérateur $\mathcal{S}_{u^{\lambda+i\eta}}$ peut être compris de la manière suivante : on part de l'opérateur \mathcal{B} introduit en (2.19) ; on modifie ses coefficients en les multipliant par des poids positifs ; puis on multiplie l'opérateur par une phase u^z .

Négligeons les poids positifs, qui peuvent être contrôlés supérieurement et inférieurement grâce à l'hypothèse (2.16), et n'introduisent que des complications techniques. On a donc $\mathcal{S}_{u^z} = u^z \frac{1}{d-1} \mathcal{B}$, où d désigne le degré.

L'opérateur \mathcal{B} est contractant sur l'orthogonal des fonctions ne dépendant que de l'origine. En effet, un calcul élémentaire montre que, si $F := \{K \in \mathbb{C}^{B_N} \text{ telles que } o_b = o_{b'} \implies K(b) = K(b')\}$, alors

$$\forall K \in F^\perp, \left\| \frac{1}{d-1} \mathcal{B}K \right\|_{\ell^2(B_N)} \leq \frac{1}{2} \|K\|_{\ell^2(B_N)}. \quad (2.25)$$

D'autre part, un calcul (moins élémentaire, et faisant intervenir l'hypothèse (2.7) sur l'expansivité des graphes) montre qu'il existe $0 < c < 1$ telle que, si $\mathbf{1}$ désigne l'espace des fonctions constantes, on a

$$\forall K \in \mathbf{1}^\perp, \left\| \left(\frac{1}{d-1} \mathcal{B} \right)^2 K \right\|_{\ell^2(B_N)} \leq c \|K\|_{\ell^2(B_N)}. \quad (2.26)$$

Les deux propriétés (2.25) et (2.26) ne suffisent pas à garantir que l'opérateur $\mathcal{S}_{u^z}^j$ est contractant, et il nous faut pour cela tirer parti de la multiplication par les phases u^z .

On peut en effet montrer que l'une des alternatives suivantes est toujours vérifiée :

- Soit il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|\mathcal{S}_{u^z}^4 K\| \leq (1 - \varepsilon) \|K\|$.
- Soit il existe une constante $c_0 \neq 1$ et une application $\theta : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$u^z(b) \approx c_0 e^{i(\theta(o_b) - \theta(t_b))}.$$

Si la première alternative est réalisée, on peut contrôler la décroissance de chaque terme de la somme dans (2.24). Lorsque la seconde alternative est réalisée, alors on ne peut plus contrôler chaque terme de (2.24), mais on peut regrouper les termes « par paquets », et utiliser les interférences destructives entre les termes de chaque paquet pour contrôler la somme.

2.4 Graphes quantiques ouverts

Un graphe quantique *ouvert* est un graphe quantique où certaines arêtes sont de longueur infinie, s'identifiant à $[0, +\infty[$. En pratique, il est souvent plus simple de décrire un graphe quantique ouvert comme $\mathcal{Q} = (V, E, L, \mathbf{n})$, où $\mathbf{n} : V \rightarrow \mathbb{N}$ est telle que $\mathbf{n}(v)$ est le nombre d'arêtes infinies attachées au sommet v .

Ainsi, lorsque (V, E) est fini, on travaillera uniquement sur la « partie compacte » de \mathcal{Q} , le caractère ouvert du graphe ne se traduisant que par la donnée supplémentaire $\mathbf{n}(v)$ en chaque sommet. De la sorte, $d(v)$ est le *degré interne* en v , correspondant au nombre d'arêtes internes (finies) attachées à v , tandis que $d(v) + \mathbf{n}(v)$ est le degré total de v .

Comme précédemment, B désigne l'ensemble des arêtes orientées de (V, E) : il s'agit donc des arêtes internes. On définit également l'ensemble des arêtes orientées externes par $B_{ext} := \bigsqcup_{v \in V} \bigsqcup_{k=1}^{n(v)} \{(v, k)\}$. On note $o_b = v$ si $b = (v, k) \in B_{ext}$, et on définit $\hat{B} = B \cup B_{ext}$.

2.4.1 Résonances de diffusion sur les graphes quantiques

Sur un graphe quantique ouvert \mathcal{Q} , on considèrera des fonctions $f = (f_b)_{b \in \hat{B}}$, avec $f_b \in C^2([0, L_b])$ si $b \in B$, et $f_b \in C^2([0, \infty))$ si $b \in B_{ext}$, vérifiant

$$\forall b \in B, f_b(\cdot) = f_{\hat{b}}(L_b - \cdot), \quad (2.27)$$

et satisfaisant les conditions de Kirchhoff, qui s'écrivent ici

$$\begin{aligned} \forall b, b' \in \hat{B}, f_b(0) = f_{b'}(0) =: f(v) \text{ si } o_b = o_{b'} = v & \quad \text{(Continuité)} \\ \forall v \in V, \sum_{b \in \hat{B}: o_b = v} f'_b(0) = 0. & \quad \text{(Conservation du courant)} \end{aligned} \quad (2.28)$$

On notera $C^2(\mathcal{Q})$ l'ensemble des fonctions vérifiant ces propriétés.

Définition 2 Soit $\mathcal{Q} = (V, E, L, \mathbf{n})$ un graphe quantique ouvert, avec (V, E) fini. Un nombre $z \in \mathbb{C}$ est une résonance de diffusion de \mathcal{Q} s'il existe $f \in C^2(\mathcal{Q})$ telle que

1. Pour chaque $b \in \hat{B}$, on a $-f''_b = z^2 f_b$.
2. Pour chaque $b \in B_{ext}$, on a $f_b(x) = f_b(0)e^{izx}$.

L'ensemble des résonances de diffusion de \mathcal{Q} sera noté $\text{Res}(\mathcal{Q})$.

Remarquons que, lorsque $\mathbf{n} \equiv 0$, la seconde condition est vide, et les résonances de diffusion sont les racines carrées des valeurs propres définies dans la section 2.1.1 ; elles appartiennent donc à l'axe réel.

On a une caractérisation des résonances de diffusion analogue à celle de (2.6). En effet, on peut montrer que pour tout $z \neq 0$,

$$z \text{ est une résonance de diffusion} \iff \det(\text{Id} - U_{\mathcal{Q}}(z)) = 0, \quad (2.29)$$

où $U_{\mathcal{Q}}(z) = SD(z)$, avec $D(z)_{b,b'} = \delta_{b,b'} e^{izL_b}$ comme dans (2.5), et où

$$S_{b,b'} = \begin{cases} \frac{2}{n(v)+d(v)} & \text{si } o_b = t_{b'} = v \text{ et } b' \neq \hat{b} \\ \frac{2}{n(v)+d(v)} - 1 & \text{si } b' = \hat{b} \text{ et } o_b = v \\ 0 & \text{si } o_b \neq t_{b'}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Remarquons que, contrairement à (2.5), dans la définition de S , c'est le degré total de v , et non le degré intérieur, qui apparaît ; ainsi, la matrice S n'est pas unitaire, mais est de norme ≤ 1 . Ceci implique que les résonances se trouvent dans le demi-plan $\Im z \leq 0$.

Le critère (2.29) a été formulé sous différentes formes analogues dans [KS03], [DP12] ou encore [Lip16b]; la formulation (2.29, 2.30) proposée dans [Ing22a] a le mérite de donner les coefficients de $U(z)$ de manière complètement explicite, et de considérer une matrice $U(z)$ dont les entrées sont indexées par $B \times B$, et non par $\hat{B} \times \hat{B}$. La preuve de ce critère est élémentaire, et peut être adaptée à des conditions aux sommets plus générales que celles de Kirchhoff.

Néanmoins, contrairement au cas auto-adjoint, la question des multiplicités n'est pas du tout élémentaire. On peut définir la *multiplicité géométrique* d'une résonance comme le nombre de fonctions f linéairement indépendantes vérifiant les conditions de la Définition 2. Sa *multiplicité algébrique* (correspondant à la taille d'éventuels blocs de Jordan) peut être définie à l'aide de la distorsion analytique, ou en étudiant le prolongement méromorphe de la résolvante, comme dans [DZ19a]. Enfin, on peut considérer l'ordre d'annulation au point z de la fonction holomorphe $z' \mapsto \det(\text{Id} - U(z'))$, correspondant à une *multiplicité analytique*. Il a été démontré dans [DP12] que, dans le cas des conditions de Kirchhoff (2.28), les multiplicités analytiques et algébriques coïncident; toutefois, la question de savoir si ces multiplicités coïncident pour des conditions de raccord plus générales est encore ouverte.

Dans la suite, si $\Omega \subset \mathbb{C}$, on notera toujours $\mathcal{N}_{\mathcal{Q}}(\Omega)$ le nombre de résonances de \mathcal{Q} dans Ω , comptées avec multiplicité analytique.

Résultats précédents concernant les résonances de graphes quantiques ouverts Lorsqu'on considère un problème de diffusion par un potentiel dans \mathbb{R}^d (ce qui est donc un problème spectral non-autoadjoint), une question importante est celle de l'existence d'une loi de Weyl : si on note $N(R)$ le nombre de résonances dans $D(0, R)$ comptées avec multiplicité, a-t-on $N(R) \sim CR^d$? Lorsque $d \geq 2$, on ne sait en général prouver que des bornes supérieures $N(R) \leq R^d$, comme dans [Zwo89]. En revanche, en dimension $d = 1$, il a été prouvé dans [Reg58], puis généralisé dans [Zwo87] (voir aussi [Fro97] et [Sim00]) que

$$\frac{N(R)}{R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{2\text{Vol}(\text{chsupp}(V))}{\pi}, \quad (2.31)$$

où $\text{Vol}(\text{chsupp}(V))$ est la longueur de l'enveloppe convexe du potentiel V : ce résultat est un analogue de la loi de Weyl usuelle pour le laplacien sur une variété compacte, $\text{Vol}(\text{chsupp}(V))$ jouant le même rôle que le volume de la variété.

Sur un graphe quantique ouvert, il est naturel de se demander si on a aussi une loi de Weyl pour le comptage des résonances. Dans [DP12], les auteurs ont montré que, sur un graphe quantique ouvert avec des conditions de Kirchhoff à chaque sommet, on a $\frac{N(R)}{R} \rightarrow c$, où $c \in]0, \frac{2}{\pi}\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}]$. La constante vaut $\frac{2}{\pi}\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}$ si et seulement si le graphe est *déséquilibré*, au sens où, à chaque sommet v , on a $d(v) \neq \mathbf{n}(v)$. Sinon, on a $c < \frac{2}{\pi}\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}$, et les auteurs parlent de graphes *non-Weyl*. D'autres constructions de graphes non-Weyl (par exemple à l'aide de conditions aux limites plus générales ou de champs magnétiques) ont été proposées dans [DP12, Lip16a, EL11, DPL10]. Le lecteur pourra se référer à [Lip16b] pour une présentation de ces développements récents.

Plutôt que de compter les résonances dans des disques $D(0, R)$, on peut les compter dans des bandes, et chercher l'asymptotique quand $N \rightarrow \infty$ du nombre de résonances dans $[-N, N] + i[a, b]$ pour $a < b$. En fait, ces questions sont très reliées : il a été montré dans [DP12] que les résonances d'un graphe quantique se trouvent toujours dans une bande de la forme $\Im z \in [-K, 0]$, mais les auteurs ne donnent pas d'expression pour K . Dans [Ing22a], j'ai donné une expression pour K dans le cas des graphes déséquilibrés, que je rappellerai dans (2.33) ci-dessous. D'autre part, il a été montré dans [CdVT18] qu'il existe une infinité de résonances dans toute bande de la forme $\Im z \in [-\varepsilon, 0]$, pour tout $\varepsilon > 0$, de sorte qu'on ne peut pas espérer avoir un trou spectral sous l'axe réel.

2.4.2 Asymptotique du comptage des résonances pour une suite de graphes quantiques ouverts

Récemment, la répartition asymptotique des résonances de diffusions dans de grands systèmes ouverts a fait l'objet de nombreux travaux. Ainsi, les résultats de [Klo16] décrivent les résonances d'opérateurs de Schrödinger sur \mathbb{Z} , où le potentiel est périodique ou aléatoire, et restreint à un grand intervalle $[-R, R]$, tandis que les résultats de [Dro17] concernent un potentiel (aléatoire ou périodique) rapidement oscillant dans un compact de \mathbb{R}^d , ce qui peut se ramener par changement d'échelle à l'étude des résonances d'un potentiel délocalisé. Plusieurs résultats considèrent les résonances de grands recouvrements (aléatoires ou déterministes) de surfaces de Schottky : voir par exemple [PS20, JNS20, Soa21]. Enfin, on peut mentionner les résultats de [NSZ11b, NSZ11a], considérant des opérateurs de Schrödinger semiclassiques $-h^2\Delta + V$ sur \mathbb{R}^d dont la dynamique classique sous-jacente est hyperbolique près des trajectoires piégées ; les résonances proches de l'axe réel peuvent alors être décrites comme les racines de

$$\det(\text{Id} - M_h(z)), \quad (2.32)$$

où les $M_h(z)$ sont des matrices de taille $\approx h^{-d+1}$. De nombreuses conjectures concernant les résonances de tels systèmes sont présentées dans [Non11, Zwo17].

Motivé par de tels résultats et de telles questions, dans mes travaux sur les résonances de graphes quantiques ouverts, je ne me suis pas intéressé aux résonances d'un graphe fixé, mais d'une suite de graphes, cherchant à obtenir des résultats analogues au Théorème 1.

Étant donné $n_0 \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble $\mathfrak{Q}_{D, n_0, L_{\min}, L_{\max}}$ des graphes quantiques ouverts vérifiant (2.1) et $\mathbf{n}(v) \leq n_0$ pour tout $v \in V$, et tels que $\mathbf{n}(v) \neq d(v)$ pour tout $v \in V$. À l'aide de (2.29) et (2.30), il est élémentaire de montrer que pour tout $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{D, n_0, L_{\min}, L_{\max}}$, on a

$$\begin{aligned} \text{Res}(\mathcal{Q}) &\subset \mathbb{R} + i \left[-\frac{1}{L_{\min}} \sup_{v \in V} (\ln(\mathbf{n}(v) + d(v)) - \ln |d(v) - \mathbf{n}(v)|), 0 \right] \\ &\subset \mathbb{R} + i \left[-\frac{\ln(n_0 + D)}{L_{\min}}, 0 \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Toutes les définitions de la section 2.2 s'adaptent verbatim au cas des graphes quantiques ouverts : on peut ainsi définir l'espace ROQ des (classes d'équivalence de) graphes quantiques ouverts enracinés, et la convergence de Benjamini-Schramm d'une suite de graphes quantiques vers une mesure de probabilité sur ROQ. On a alors des propriétés de compacité analogues (d'une suite de graphes ouverts dans $\mathfrak{Q}_{D,n_0,L_{min},L_{max}}$, on peut extraire une sous-suite qui converge au sens de Benjamini-Schramm) : l'essentiel est que la partie non-compacte du graphe n'est vue ici que comme une donnée supplémentaire sur les sommets ; deux graphes quantiques ouverts sont identifiés si les graphes quantiques fermés sont identifiés, et si l'isomorphisme de graphe préserve le nombre d'arêtes ouvertes par sommet.

On peut également définir la mesure spectrale empirique d'un graphe quantique ouvert comme

$$\mu_{\mathcal{Q}} := \frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{Q})} \sum_{z \in \text{Res}(\mathcal{Q})} \delta_z.$$

Il est alors naturel de se demander s'il existe un analogue du Théorème 1 dans le cas des graphes quantiques ouverts (du moins dans le cas des graphes déséquilibrés) : c'est l'objet de la conjecture suivante.

Conjecture 1 ([Ing22b]) *Soit $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\text{ROQ})$. Il existe $\mu_{\mathbb{P}}$, mesure borélienne sur \mathbb{C} , telle que, si (\mathcal{Q}_N) est une suite de graphes quantiques ouverts dans $\mathfrak{Q}_{D,n_0,L_{min},L_{max}}$ convergeant au sens de Benjamini-Schramm vers \mathbb{P} , alors $\mu_{\mathcal{Q}_N}$ converge vaguement vers $\mu_{\mathbb{P}}$.*

Le cas des graphes quantiques faiblement ouverts Dans [Ing22a], j'ai considéré les résonances de graphes faiblement ouverts, où le nombre d'arêtes infinies est petit par rapport au nombre d'arêtes finies, de sorte que $\sum_{v \in V_N} \mathbf{n}_N(v) = o_{N \rightarrow \infty}(|E_N|)$.

On peut alors montrer qu'il y a peu de résonances loin de l'axe réel. Rappelons que, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert, on notera $\mathcal{N}_{\mathcal{Q}_N}(\Omega)$ le nombre de résonances de \mathcal{Q}_N dans Ω , comptées avec leur multiplicité *analytique*. On a alors le résultat suivant :

Théorème 4 ([Ing22a]) *Soit (\mathcal{Q}_N) une suite d'éléments de $\mathfrak{Q}_{D,n_0,L_{min},L_{max}}$. Il existe $C = C(D, n_0, L_{min}, L_{max}) > 0$ telle que l'on a le résultat suivant.*

Soit (δ_N) une suite de réels positifs, soient $0 < a_1 < a_2$, $0 < a_3$. Alors, pour N assez grand, on a

$$\mathcal{N}_{\mathcal{Q}_N}([a_1, a_2[+i] - a_3, -\delta_N]) \leq \frac{C}{\delta_N^{5/2}} \sum_{v \in V_N} \mathbf{n}_N(v).$$

En particulier, si $\sum_{v \in V_N} \mathbf{n}_N(v) = o_{N \rightarrow \infty}(|V_N|)$, alors pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{C}$ tel que $\bar{\Omega} \cap \mathbb{R} = \emptyset$, on a

$$\frac{1}{|V_N|} \mathcal{N}_{\mathcal{Q}_N}(\Omega) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

D'autre part, le résultat principal de [Ing22a] affirme que la Conjecture 1 est vérifiée dans le cas d'une suite de graphes (\mathcal{Q}_N) faiblement ouverts. La limite $\mu_{\mathbb{P}}$ est alors la même que celle obtenue pour la suite de graphes (\mathcal{Q}'_N) obtenue en « fermant le graphe », c'est-à-dire en remplaçant la fonction \mathbf{n} par la fonction identiquement nulle. La répartition asymptotique des résonances de \mathcal{Q}'_N , et donc de \mathcal{Q}_N , peut être directement décrite à l'aide du Théorème 1, en utilisant le fait que, pour un graphe fermé, les résonances sont les racines carrées des valeurs propres.

Ce résultat possède une démonstration compliquée dans [Ing22a], qui peut être grandement simplifiée à l'aide des résultats présentés ci-dessous.

Le cas général Lorsque (\mathcal{Q}_N) est une suite de graphes de $\mathfrak{Q}_{D,n_0,L_{min},L_{max}}$ qui converge au sens de Benjamini-Schramm vers une mesure \mathbb{P} n'étant pas supportée sur l'ensemble des graphes enracinés fermés (c'est-à-dire que $\mathbb{P}(\mathbf{n}(o_b) \neq 0) > 0$, de sorte que les graphes (\mathcal{Q}_N) ne sont pas faiblement ouverts), la Conjecture 1 est ouverte. Cette conjecture équivaut à dire que, pour tout $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, il existe un $\ell(\chi, \mathbb{P})$, ne dépendant que de χ et de \mathbb{P} , tel que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_N|} \sum_{z \in \text{Res}(\mathcal{Q}_N)} \chi(z) = \ell(\chi, \mathbb{P}). \quad (2.34)$$

L'un des résultats principaux de [Ing22b] est que (2.34) est vérifiée pour de nombreuses fonctions χ . En effet, si $-\infty \leq y_1 < y_2 \leq +\infty$, notons $\Omega_{y_1, y_2} := \{z \in \mathbb{C}; \Im z \in (y_1, y_2)\}$, et notons $\mathcal{H}(\Omega_{y_1, y_2})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω_{y_1, y_2} .

Notons $Y(D, n_0, L_{min}) := -\frac{\ln(n_0 + D)}{L_{min}}$ comme dans (2.33). On a alors le résultat suivant.

Proposition 1 ([Ing22b]) *Soit (\mathcal{Q}_N) une suite de graphes de $\mathfrak{Q}_{D,n_0,L_{min},L_{max}}$ qui converge au sens de Benjamini-Schramm vers une mesure \mathbb{P} .*

Soit $y_1 < Y(D, n_0, L_{min})$ et $y_2 > 0$. Si $\chi \in \mathcal{H}(\Omega_{y_1, y_2}) \cap L^1(\Omega_{y_1, y_2})$, alors (2.34) est vérifiée.

Remarquons que l'espace $\mathcal{H}(\Omega_{y_1, y_2}) \cap L^1(\Omega_{y_1, y_2})$ n'est pas vide, car il contient toutes les gaussiennes

$$\chi(z) = e^{-a(z-z_0)^2}, \quad a > 0, z_0 \in \mathbb{C}. \quad (2.35)$$

La démonstration de la Proposition 1 repose sur une formule de traces reliant la somme sur les résonances des valeurs d'une fonction holomorphe à une intégrale de la résolvante de $U_{\mathcal{Q}}$ sur des lignes horizontales.

Théorème 5 ([Ing22b]) *Soit $D, n_0 \in \mathbb{N}$, soit $0 < L_{min} \leq L_{max}$ et soit $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{D,n_0,L_{min},L_{max}}$ un graphe quantique fini. Soit $y_1 \leq Y(D, n_0, L_{min})$, soit $y_2 \geq 0$, et soit $\varepsilon > 0$.*

Pour tout $\chi \in L^1(\Omega_{y_1-\varepsilon, y_2+\varepsilon}) \cap \mathcal{H}(\Omega_{y_1-\varepsilon, y_2+\varepsilon})$, on a

$$2i\pi \sum_{z \in \text{Res}(\mathcal{Q})} \chi(z) = \sum_{j=1,2} (-1)^j \int_{\mathbb{R}} \chi(x+iy_j) \text{Tr} \left[U'_{\mathcal{Q}}(x+iy_j) (\text{Id} - U_{\mathcal{Q}}(x+iy_j))^{-1} \right] dx, \quad (2.36)$$

où la somme de gauche est comptée avec multiplicité.

Le théorème 5 permet de donner une expression pour la limite $\ell(\chi, \mathbb{P})$ apparaissant dans (2.34), comme décrit à la fin de la section 2.4.3.

De plus, en utilisant des fonctions de la forme (2.35) dans (2.36), on peut montrer qu'il existe $\alpha = \alpha(D, n_0, L_{min}) > 0$ et $N_0 = N_0(D, n_0, L_{min}) \in \mathbb{N}$ tel que, si $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{D, n_0, L_{min}, L_{max}}$, alors toute bande verticale de largeur α contient au moins N_0 résonances; ce résultat contraste avec le fait qu'il est en général difficile d'obtenir des bornes inférieures dans les problèmes de comptage asymptotique de résonances, d'autant que α et N_0 sont complètement explicites.

Corollaire 1 *Soit $D, n_0 \in \mathbb{N}$, soit $0 < L_{min} \leq L_{max}$ et soit $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{D, n_0, L_{min}, L_{max}}$ un graphe quantique fini.*

Posons

$$a := \frac{\ln 2}{\left(\frac{\ln 32 + \ln 16}{L_{min}} - Y(D, n_0, L_{min}) \right)^2}.$$

Soit $\alpha > 0$ tel que

$$\frac{\alpha}{L_{min}} \geq \left(\left[Y - \frac{\ln 16}{L_{min}} \right]^2 - \frac{1}{a} \ln \left(L_{min} \ln 2 \frac{1 - e^{-\frac{a}{L_{min}^2}}}{16\pi \left(2L_{max} \frac{1 + \ln(D+n_0)}{L_{min}} + 0.6 \right) \sqrt{\frac{\pi}{a}}} \right) \right)^{1/2}. \quad (2.37)$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{N}_{\mathcal{Q}} \left(\left\{ z \in \mathbb{C}; x_0 - \frac{\alpha}{L_{min}} < \Re z < x_0 + \frac{\alpha}{L_{min}} \right\} \right) \geq \frac{\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}}{16\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Exemple numérique Supposons que $n_0 = 1$, $D = 4$, $L_{min} = 1$, $L_{max} = 2$. On a alors $Y = -\ln 5$, $a \approx 1.12 \times 10^{-2}$, $\frac{1}{16\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \approx 0.33$, et la condition (2.37) se réécrit

$$\frac{\alpha}{L_{min}} \geq 27.7.$$

Par conséquent, toute bande verticale de largeur au moins 56 contient au moins $0.33 \times \mathcal{L}_{\mathcal{Q}}$ résonances.

D'autre part, le théorème de [DP12] implique que le nombre de résonances dans $-R \leq \Re z \leq R$ est de l'ordre de $R \frac{2\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}}{\pi}$ lorsque R est grand. Ainsi, une bande verticale de largeur 56 contiendra, en moyenne, $\frac{56\mathcal{L}_{\mathcal{Q}}}{\pi} \approx 18 \times \mathcal{L}_{\mathcal{Q}}$ résonances. Le résultat du Corollaire 1 n'est donc que deux ordres de grandeur sous le résultat moyen.

2.4.3 Idées de démonstration

La preuve du Théorème 4 repose principalement sur la formule de Jensen, et sur des estimées élémentaires sur la fonction $f_{\mathcal{Q}}(z) = \det(\text{Id} - U_{\mathcal{Q}}(z))$.

La démonstration du Théorème 5 s'appuie sur la formule de Cauchy, qui implique que, pour tout ouvert Ω ,

$$2i\pi \sum_{z \in \text{Res}(\mathcal{Q}) \cap \Omega} \chi(z) = \int_{\partial\Omega} \chi(z) \frac{f'_{\mathcal{Q}}(z)}{f_{\mathcal{Q}}(z)} dz = \int_{\partial\Omega} \chi(z) \text{Tr} \left[U'_{\mathcal{Q}}(z) (\text{Id} - U_{\mathcal{Q}}(z))^{-1} \right] dz. \tag{2.38}$$

On veut appliquer (2.38) lorsque Ω est un rectangle dont les bords latéraux tendent vers $\pm\infty$, en prenant garde que les contributions latérales soient négligeables à la limite.

Pour cela, on montre que, pour tout $y_1 < y_2$, il existe $c = c(\mathcal{Q}, y_1, y_2)$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n^{\pm} \in [n, n + 1]$ (respectivement $[-n - 1, -n]$) vérifiant

$$\forall y \in [y_1, y_2], |f(x_n^{\pm} + iy)| > c.$$

L'existence de tels x_n^{\pm} découle des estimées prouvées dans [Ing22a], s'appuyant sur les méthodes développées par Sjöstrand [Sjö96, Sjö00].

Enfin, pour déduire la Proposition 1 du Théorème 5, il faut utiliser le fait que, pour chaque z avec $\Im z \notin [Y(D, n_0, L_{\min}), 0]$, l'application $(\mathcal{Q}, b) \mapsto \left[U'_{\mathcal{Q}}(x + iy_j) (\text{Id} - U_{\mathcal{Q}}(x + iy_j))^{-1} \right]_{b,b}$ est continue sur ROQ . Ce résultat se démontre en utilisant une série de Neumann, et il permet d'utiliser la convergence de Benjamini-Schramm pour déduire la convergence du membre de droite dans (2.36).

2.5 Directions futures

Les résultats de [Ing22a, Ing22b] sont les premiers résultats traitant des résonances de grands graphes quantiques; j'aimerais continuer à étudier ce régime asymptotique dans le futur, en répondant aux questions suivantes (parfois assez vagues).

Le cas des graphes non-déséquilibrés Tous les résultats présentés dans la section 2.4 font l'hypothèse que les graphes sont déséquilibrés, au sens où $n(v) \neq d(v)$ pour tout $v \in V$. Il est naturel de se demander dans quelle mesure cette hypothèse est nécessaire.

Un travail en cours avec Ulrich Kuhl, Junjie Lu, et Thomas Ourmières considère le cas de graphes où, sur un sommet, on met une condition de Kirchhoff généralisée, permettant de passer continûment d'un graphe déséquilibré à un graphe non-déséquilibré; on observe que, lorsque le graphe s'approche d'un graphe non-déséquilibré, la partie imaginaire d'une partie des résonances tend vers l'infini; à la limite, ces résonances ont disparu, induisant une baisse du volume effectif du graphe dans la loi de Weyl de [DP12].

Cette fuite des résonances vers l'infini peut-elle être contrôlée lorsque la taille du graphe tend vers l'infini ? On sait que, pour un graphe quantique fixé, les résonances sont toutes contenues dans une bande horizontale ; dans le cas non-déséquilibré, peut-on contrôler la taille de cette bande à partir de bornes simples sur les données du graphe, comme dans (2.33) ? Peut-on encore avoir un analogue du Théorème 5 et du Corollaire 1 ?

Trou spectral asymptotique Dans [BG01], les physiciens Barra et Gaspard ont introduit une notion de pression topologique sur les graphes quantiques, et ont affirmé que les résonances devaient toutes se trouver dans une bande de la forme $\Im z \in [y_1, y_2]$, où $y_2 < 0$ est relié à cette pression topologique. Il y aurait donc un trou spectral, relié à des propriétés de la dynamique classique (chaotique) sur un graphe.

Cette affirmation a été contredite dans [GSS13] par des arguments physiques et des simulations numériques, ainsi que par les théorèmes de [CdVT18] : il existe des résonances z avec $\Im z$ arbitrairement proche de 0, lorsque $\Re z$ tend vers l'infini.

On peut néanmoins se poser la question, pour une suite de graphes (\mathcal{Q}_N) , du trou spectral asymptotique. Un intervalle I étant fixé, quelles conditions sur la suite (\mathcal{Q}_N) garantirait l'existence d'une constante $c_I > 0$ telle que les résonances de \mathcal{Q}_N de partie réelle dans I ont toute une partie imaginaire $< -c_I$? Ou bien, peut-on avoir le résultat plus faible que

$$\mathcal{N}_{\mathcal{Q}_N}(\{z \in \mathbb{C}; \Re z \in I, \Im z > -c_I\}) = o_{N \rightarrow \infty}(\mathcal{L}_{\mathcal{Q}_N})?$$

Il y a fort à parier que la réponse à ces questions fera intervenir une condition de pression topologique analogue à celle de Barra et Gaspard⁵.

Concentration des taux de décroissance Considérons un opérateur de Schrödinger semiclassique dont la dynamique classique sous-jacente a un ensemble piégé hyperbolique. Il est conjecturé ([Zwo17, Conjecture 7]) que la plupart des résonances dans un disque $D(E, Rh)$ avec $E, R > 0$ ont une partie imaginaire proche de $\frac{\mathcal{P}(1)}{2}$, correspondant à la moitié du taux de fuite classique. (Voir [Bor07, §16.3.3] pour des simulations numériques dans le cas des surfaces hyperboliques convexes co-compactes.)

Si on cherche à définir un taux de fuite pour une suite de graphes quantiques (en s'inspirant de [BG01], comme dans le paragraphe précédent), il est possible que celui-ci dépende de $\Re z$; on peut donc s'attendre (sous de bonnes hypothèses) à ce que les résonances s'accumulent sur une courbe.

5. De façon générale, les analogies avec la dynamique classique pour décrire les propriétés spectrales des graphes quantiques semblent mieux fonctionner quand on considère des suites de grands graphes que pour un graphe fixé : ainsi, l'ergodicité quantique n'est pas vérifiée sur un graphe fixé, et la bonne hypothèse chaotique pour obtenir un tel résultat semble être l'expansivité d'une famille de graphes (voir la section 2.3). Dans les problèmes de diffusion, l'analogie entre grands graphes quantiques ouverts et systèmes de chaos quantique ouvert se manifeste également par l'analogie formelle entre (2.29) et (2.32).

On peut donc se poser la question suivante : étant donnée une suite de graphes quantiques ouverts (\mathcal{Q}_N) convergeant au sens de Benjamini-Schramm vers une mesure \mathbb{P} , existe-t-il une courbe $\gamma = \{(x, \gamma(x))\}$ ne dépendant que de \mathbb{P} telle que, si Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{C} \setminus \gamma$, on a

$$\mathcal{N}_{\mathcal{Q}_N}(\Omega) = o_{N \rightarrow \infty}(\mathcal{L}_{\mathcal{Q}_N})?$$

Chaos quantique et ondes aléatoires

Contents

3.1 Champs aléatoires gaussiens	27
3.1.1 Domaines nodaux de champs aléatoires gaussiens	29
3.2 Limites locales faibles	30
3.2.1 Une formulation de la conjecture de Berry	32
3.3 États lagrangiens propagés et conjecture de Berry	34
3.3.1 Propagation d'états lagrangiens génériques	35
3.3.2 Un modèle de perturbation aléatoire du laplacien	37
3.3.3 Propagation bruitée d'états lagrangiens	39
3.3.4 Idées de démonstration	40
3.4 Projets futurs	43

Ce chapitre présente mes contributions à l'étude des champs aléatoires gaussiens, en lien avec le chaos quantique. Dans la section 3.1, après avoir rappelé quelques définitions, je présenterai ma contribution (avec Alejandro Rivera) à l'étude des domaines nodaux du champ aléatoire gaussien monochromatique isotrope stationnaire.

L'une des motivations pour l'étude des champs aléatoires gaussiens est la conjecture de Berry, affirmant que sur une variété de courbure négative, une fonction propre de haute énergie, à l'échelle de la longueur d'onde, ressemble à un tel champ. Je présenterai dans la section 3.2 une formulation rigoureuse de cette conjecture, à l'aide de la notion de limite locale faible.

Si cette conjecture semble actuellement hors de portée, j'ai obtenu avec Alejandro Rivera, puis avec Martin Vogel, des résultats analogues pour des état lagrangiens propagés en temps long : je présenterai ces résultats dans la section 3.3.

3.1 Champs aléatoires gaussiens

Un champ aléatoire lisse sur \mathbb{R}^d est une variable aléatoire f prenant ses valeurs dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ici, $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est équipé de la tribu borélienne associée à la topologie (métrisable) de la convergence de toutes les dérivées sur tous les compacts. Deux champs aléatoires f_1 et f_2 sont dits équivalents s'ils ont la même loi. Dans la suite, j'identifierai toujours deux champs aléatoires ayant la même loi. De façon générale, j'aurai tendance à identifier un champ aléatoire et sa loi.

On dit que le champ aléatoire est gaussien (et centré) si, pour toute famille de points $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$, le vecteur aléatoire $(f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_k)) \in \mathbb{C}^k$ est un vecteur gaussien (centré).

Si f est un champ gaussien lisse centré sur \mathbb{R}^d , alors son noyau de covariance $K : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbb{E}[f(\mathbf{x})\overline{f(\mathbf{y})}]$ est une fonction lisse, et est défini positif, au sens où pour chaque $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \in (\mathbb{R}^d)^k$, la matrice $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)_{i,j}$ est définie positive.

Comme expliqué dans [NS15, Appendice A.11], il y a une correspondance bijective entre les champs gaussiens lisses centrés (à équivalence près) et les noyaux de covariance.

Définition 3 *Le champ aléatoire de Berry, que l'on notera f_{Berry} , est l'unique champ aléatoire gaussien centré sur \mathbb{R}^d dont la fonction de covariance est $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i(x-y)\cdot\xi} d\sigma(\xi)$, où σ est la mesure de probabilité uniforme sur \mathbb{S}^{d-1} .*

Plus généralement, si μ est une mesure finie sur $]0, +\infty[$, on définit la mesure λ_μ sur \mathbb{R}^d donnée par

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_\mu(x) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\omega_{d-1}(y) f(ry) d\mu(r), \quad (3.1)$$

où ω_{d-1} est la mesure uniforme sur \mathbb{S}^{d-1} . On définit alors le champ aléatoire gaussien f_μ dont la fonction de covariance est

$$\mathbb{E}[f(x)\overline{f(y)}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot\xi} d\lambda_\mu(\xi).$$

En particulier, $f_{\delta_{\{1\}}}$ est f_{Berry} . Si $\lambda > 0$, on notera souvent λf_{Berry} pour le champ $f_{\lambda^2\delta_{\{1\}}}$.

Cette dernière notation est naturelle si on pense à $f_{\lambda^2\delta_{\{1\}}}$ comme à une fonction aléatoire, et non à une mesure de probabilité sur $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Le champ f_{Berry} est l'unique champ gaussien monochromatique stationnaire isotrope, et normalisé de sorte que $\mathbb{E}[|f_{Berry}|^2] = 1$. Ici, stationnaire signifie que le noyau de covariance ne dépend que de $x - y$; isotrope signifie que le noyau de covariance ne dépend que de $|x - y|$; et monochromatique signifie que le noyau de covariance vérifie $-\Delta K = K$, par rapport aux deux variables x et y , ce qui implique qu'une réalisation du champ de Berry vérifie $-\Delta f_{Berry} = f_{Berry}$ presque sûrement.

En dimension 2, le champ de Berry peut être exprimé simplement en coordonnées polaires, par

$$f_{Berry}(r, \theta) = X_0 J_0(r) - \sqrt{2} \sum_{n \geq 1} J_n(r) (X_n \cos(n\theta) + Y_n \sin(n\theta)), \quad (3.2)$$

où, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on note J_n la $n^{\text{ième}}$ fonction de Bessel, $J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta - x \sin(\theta)} d\theta$, et où les $(X_k)_{k \geq 0}$ et $(Y_k)_{k \geq 1}$ sont deux familles de variables aléatoires suivant une loi normale centrée réduite, et formant une famille indépendante.

3.1.1 Domaines nodaux de champs aléatoires gaussiens

Pour chaque $R > 0$, on note $N(R, \mathfrak{f}_{Berry})$ le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathfrak{f}_{Berry}^{-1}(\{0\})$ qui sont incluses dans le disque de centre 0 et de rayon R .

Dans [NS09], [NS15], Nazarov et Sodin ont montré que la limite ¹

$$\nu_{BS} = 4\pi \times \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}N(R, \mathfrak{f}_{Berry})}{\pi R^2} \quad (3.3)$$

existe et est positive. Toutefois, leur méthode ne donne pas de valeur explicite pour la constante ν_{BS} , parfois appelée *constante de Bogomolny-Schmit*, ou *constante de Nazarov-Sodin*. Dans [BS02], les physiciens Bogomolny et Schmit ont donné un argument heuristique, basé sur un modèle de percolation, indiquant que

$$\nu_{BS} \simeq 0.0624.$$

Néanmoins, les simulations numériques de Nastasescu ([Nas11]), Konrad ([Kon12]) et Beliaev-Kerata ([BK13]) ont montré que $\nu_{BS} \simeq 0.0589$, ce qui contredit la prédiction de Bogomolny-Schmit de quelques pour cent. La valeur de la constante de Bogomolny-Schmit a aussi été étudiée expérimentalement par Kuhl, Höhmann, Stöckmann et Gnutzmann ([KHSG07]), en utilisant la conjecture de Berry [Ber77] dont je parlerai en section 3.2.1.

D'un point de vue mathématique, peu de bornes existent. En particulier, pendant longtemps, la meilleure borne inférieure disponible était celle de Nastasescu [Nas11], de l'ordre de 10^{-26} . Avec Alejandro Rivera, nous avons obtenu une borne bien meilleure par des arguments élémentaires.

Théorème 6 ([IR19])

$$\nu_{BS} \geq 1.39 \times 10^{-4}.$$

Remarquons que des estimations quantitatives d'autres propriétés topologiques du lieu de l'ensemble nodal du champ aléatoire de Berry ont été données, par exemple dans [GW18], [CIE21].

Idée de la démonstration

L'étape essentielle pour démontrer le Théorème 6 est d'estimer la probabilité que \mathfrak{f}_{Berry} ait un domaine nodal contenu dans le disque de centre 0 et de rayon r_0 , pour r_0 bien choisi. Pour cela, on utilise la méthode de la barrière : J_0 étant positive en l'origine, on choisit r_0 tel que $J_0(r_0)$ est négative, de sorte que $(r, \theta) \mapsto X_0 J_0(r)$ a un domaine nodal dans $D(0, r_0)$. On essaye alors de montrer que, avec une probabilité pas trop petite, les autres termes dans (3.2) sont suffisamment petits pour que \mathfrak{f}_{Berry} ait elle aussi un domaine nodal dans $D(0, r_0)$.

1. La constante de Bogomolny-Schmit constant est souvent définie comme la limite (quand le degré tend vers l'infini) du nombre moyen de domaines nodaux d'une harmonique sphérique aléatoire, divisé par le degré de l'harmonique sphérique. Cette définition est la même que celle de (3.3), le facteur 4π correspondant à l'aire de la sphère unité.

Dans [NS09, Nas11], cette estimée est réalisée en majorant décomposant le terme $\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} J_n(r) (X_n \cos(n\theta) + Y_n \sin(n\theta))$ à l'aide d'estimées déterministes sur les fonctions propres du laplacien. Dans [IR19], on prend $r_0 \approx 3.8$, correspondant au minimum de J_0 , et on utilise le fait que $n \mapsto J_n(r_0)$ décroît très rapidement, de sorte qu'en pratique, dans la somme (3.2), seules 5 ou 6 valeurs de n sont importantes pour $r = r_0$. Cette décroissance rapide se traduit par exemple par l'égalité classique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 J_n(x)^2 = \frac{x^2}{2}$.

Pour estimer la probabilité que f_{Berry} ait un domaine nodal dans $D(0, r_0)$, on estime, pour chaque valeur de X_0 fixée, l'espérance du nombre de changements de signes de $\theta \mapsto f_{Berry}(r_0, \theta)$, à l'aide de la formule de Kac-Rice. Lorsque $|X_0|$ est suffisamment grand, cette espérance est < 2 , de sorte qu'il y a une probabilité > 0 (que l'on peut estimer par l'inégalité de Markov) que f_{Berry} ait un domaine nodal dans $D(0, r_0)$.

3.2 Limites locales faibles

Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soit (ϕ_h) une famille de fonctions propres du Laplacien sur X (on pourrait considérer d'autres conditions aux limites que celles de Dirichlet) :

$$\begin{cases} -h^2 \Delta \phi_h &= \phi_h \\ \phi_h|_{\partial X} &= 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

Ici, le paramètre h prend des valeurs discrètes tendant vers zéro, et on suppose que $\|\phi_h\|_{L^2} = 1$.

On veut étudier les propriétés des fonctions ϕ_h à l'échelle de la longueur d'onde h . Pour cela, on introduit une fonction $\chi \in C_c^\infty([0, \infty); [0, 1])$, décroissante, valant 1 dans un voisinage de l'origine, et nulle en dehors de $[0, 1]$.

Si $x_0 \in X$, on définit une fonction $\phi_{x_0, h} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ par

$$\phi_{x_0, h}(y) := \phi_h(x_0 + hy) \chi\left(\frac{h|y|}{d(x_0, \partial X)}\right). \quad (3.5)$$

Si ϕ_h est une famille de fonctions propres du laplacien sur une variété Riemannienne X , l'expression $\phi_h(x_0 + hy)$ n'a plus de sens. A la place, on peut raisonner localement, en considérant un repère orthonormal $V = (V_1, \dots, V_d)$ défini dans un ouvert $\mathcal{U} \subset X$, c'est à dire une famille de sections lisses $(V_i)_{i=1, \dots, d} : \mathcal{U} \rightarrow TX$ telles que, pour chaque $x \in \mathcal{U}$, $(V_1(x), \dots, V_d(x))$ est une base orthonormale de $T_x X$.

Si $x \in \mathcal{U}$ et $y \in \mathbb{R}^d$, on notera $yV(x) := y_1 V_1(x) + \dots + y_d V_d(x) \in T_x X$, et

$$\widetilde{\exp}_x(y) = \exp_x(yV(x)). \quad (3.6)$$

On définit alors, de manière analogue à (3.5),

$$\phi_{x_0, h}(y) := \phi_h(\widetilde{\exp}_{x_0}(hy)),$$

de sorte que $\phi_{x_0, h} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

En prenant le point x_0 au hasard dans un ouvert \mathcal{U} , la fonction $\phi_{x_0, h}$ détermine une variable aléatoire dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Définition 4 *On dit qu'une mesure \mathbb{P} sur $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est la limite locale faible (dans l'ouvert \mathcal{U} et dans le repère V) de (ϕ_h) si la loi de $\phi_{x_0,h}$ (lorsque x_0 est choisi uniformément au hasard dans l'ouvert \mathcal{U}) converge faiblement vers \mathbb{P} quand $h \rightarrow 0$.*

Ainsi, dire que \mathbb{P} est la limite locale faible de $(\phi_h)_h$ dans l'ouvert \mathcal{U} et le repère V signifie que, pour toute fonctionnelle continue bornée $F : C^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{U})} \int_{\mathcal{U}} F(\phi_{x_0,h}) dx_0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[F].$$

Les propriétés suivantes concernant les limites locales faibles de fonctions propres ont été montrées dans [Ing21] dans le cas de fonctions propres du Laplacien dans un ouvert bornée de \mathbb{R}^d . Les démonstrations ont été adaptées au cas de variétés riemanniennes compactes dans [GR23].

Proposition 2 ([Ing21], [GR23]) *1. Si (ϕ_h) est une famille de fonctions propres du laplacien, alors quitte à extraire une sous-suite, elle admet une limite locale faible.*

2. Une limite locale faible d'une famille de fonctions propres du laplacien est supportée sur $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d); -\Delta f = f\}$.

3. Une limite locale faible \mathbb{P} est invariante par translations, au sens suivant. Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et si $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\tau_x f = f(\cdot + x)$. Alors, pour tout borélien $A \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\tau_x A)$.

Dans [Ing21], je donne quelques exemples dans lesquels on peut calculer la limite locale faible d'une famille de fonctions propres.

— Soit (ϕ_h) une famille de fonctions propres se concentrant sur un ensemble de volume nul, au sens où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists U_\varepsilon \subset X \text{ ouvert tel que } \text{Vol}(X \setminus U_\varepsilon) < \varepsilon \text{ et } \lim_{h \downarrow 0} \int_{U_\varepsilon} |\phi_h|^2(x) dx = 0. \quad (3.7)$$

Alors, (ϕ_h) a pour limite locale faible la mesure de Dirac en la fonction nulle (pour n'importe quel repère V dans n'importe quel ouvert \mathcal{U}).

Des exemples de telles fonctions propres incluent les harmoniques sphériques sectorielles, ou les modes de galerie.

— Soit $\xi_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$. Sur $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^d$, on considère $\phi_{n-1}(x) := \cos(nx \cdot \xi_1)$. Pour chaque $\theta \in [0, 2\pi)$, notons $f_\theta(y) := \cos(\theta + y \cdot \xi_1)$.

On peut alors montrer que (ϕ_{n-1}) a pour limite locale faible (pour n'importe quel repère V dans n'importe quel ouvert \mathcal{U}) la mesure donnée par

$$\mu_{\xi_1} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta_{f_\theta} d\theta.$$

— Sur le tore $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^2$, les fonctions propres sont de la forme

$$\phi_E(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{E}_E} a_\xi e^{ix \cdot \xi},$$

où $\mathcal{E}_E := \{\xi \in \mathbb{Z}^2; |\xi|^2 = E\}$ pour $E \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{E}_E \neq \emptyset$. On supposera que $a_{-\xi} = \overline{a_\xi}$, et que $|a_\xi| = \frac{1}{|\mathcal{E}_E|}$. On peut alors montrer que, parmi les $E \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{E}_E \neq \emptyset$, il existe une sous-suite E_n de densité 1 telle que (ϕ_{E_n}) admet pour limite locale faible \mathfrak{f}_{Berry} .

De telles fonctions ont été considérées par Bourgain dans [Bou14], où il a montré qu'elles possédaient le même nombre moyen de domaines nodaux locaux que \mathfrak{f}_{Berry} . Ce résultat a été généralisé dans [BW15] pour traiter des familles de fonctions propres du tore plus générales. L'apport de [Ing21] a été de remarquer que les estimées établies dans ces articles permettaient de considérer n'importe quelle fonctionnelle locale (et pas uniquement le nombre de domaines nodaux), ce qui établit la convergence locale faible.

3.2.1 Une formulation de la conjecture de Berry

L'une des motivations pour introduire les limites locales faibles était de proposer une nouvelle interprétation de la conjecture de Berry. Dans [Ber77], Berry a conjecturé que les fonctions propres du laplacien de grande valeur propre, dans une géométrie chaotique (par exemple, sur une variété de courbure négative), ressemblent, à l'échelle de la longueur d'onde, à des réalisations de \mathfrak{f}_{Berry} . Cette conjecture est assez vague mathématiquement, puisqu'elle compare une suite d'objets déterministe à un objet aléatoire. Elle a fait l'objet de nombreuses interprétations mathématiquement rigoureuses, appuyées par des simulations numériques (voir par exemple [HR92], [AS93], [BSS98], [Bar06] pour des simulations numériques appuyant la conjecture, et [RS94], [Zel10], [Non13] pour divers points de vue mathématique sur la conjecture)

Dans [Ing21], j'ai proposé une autre interprétation de la conjecture, dans le cas des billards chaotiques :

Conjecture 2 ([Ing21]) *Soit X un billard chaotique, et soit (ϕ_h) une suite de fonctions propres vérifiant (3.4). Alors la limite locale faible de (ϕ_h) est $\frac{1}{\sqrt{\text{Vol}(X)}} \mathfrak{f}_{Berry}$.*

Dans le cas d'une variété de courbure négative X , on peut faire la même conjecture, en introduisant un recouvrement de X par des ouverts sur lesquels des repères orthonormaux sont définis. On peut montrer que, si la conjecture de Berry est vérifiée dans une famille de repères, alors elle est vérifiée dans toute famille de repère ; néanmoins, cette approche (suivie dans [IR22]) est peu intrinsèque. Une formulation plus intrinsèque de la conjecture de Berry a été proposée dans [ABM23] (de manière indépendante de [Ing21]), consistant essentiellement à moyennner sur les différents repères en chaque point. L'équivalence entre ces deux formulations n'a été établie que très récemment, dans [GR23].

Lien entre la Conjecture 2 et d'autres conjectures en chaos quantique

Un point délicat pour l'interprétation mathématique de la conjecture de Berry est celui des normes L^∞ des fonctions propres. En effet, on pourrait s'attendre à ce que, dans une boule de taille $\varepsilon > 0$ (indépendante de h), une fonction

propre ϕ_h se comporte comme le champ aléatoire \mathfrak{f}_{Berry} dans $B(0, \varepsilon h^{-1})$. Or, dans une telle boule, avec grande probabilité, on peut montrer (voir [ABST99]) que $\sup_{x \in B(0, \varepsilon, h^{-1})} |\mathfrak{f}_{Berry}(x)| \leq C |\log h|$, de sorte que l'on pourrait conjecturer que $\|\phi_h\|_{L^\infty} \leq C |\log h|$.

Ceci corroborerait la conjecture de Sarnak [Sar95], affirmant que sur une surface hyperbolique, on a, pour tout $\varepsilon > 0$, $\|\phi_h\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon h^{-\varepsilon}$. Néanmoins, on sait que cette conjecture est fautive en dimension supérieure, grâce aux contre-exemples de [RS94]. De plus, sur certaines surfaces hyperboliques arithmétiques, il a été montré dans [Mil10] que, pour certaines familles de fonctions propres, $\|\phi_h\|_{L^\infty}$ avait une croissance plus rapide que n'importe quelle puissance de $|\log h|$ (mais moins rapide que n'importe quelle puissance de h^{-1}).

Ainsi, une interprétation de la conjecture de Berry permettant de décrire les fonctions propres du laplacien par des réalisations typiques de \mathfrak{f}_{Berry} autour de n'importe quel point serait sans doute fautive (à moins d'ajouter une hypothèse de genericité sur la variété X , qui interdirait les surfaces arithmétiques).

L'interprétation de l'heuristique de Berry donnée dans la Conjecture 2 ne souffre pas de telles subtilités : comme on ne considère que des fonctionnelles F bornées sur $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et comme on ne considère que les limites de statistiques sur le point x_0 , on ne prend pas en compte le comportement éventuellement dégénéré près de points exceptionnels. Ainsi, la Conjecture 2 ne permet de rien dire sur $\|\phi_h\|_{L^\infty}$, si ce n'est que $\|\phi_h\|_{L^\infty} \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$.

En revanche, la Conjecture 2 impliquerait une autre conjecture célèbre en chaos quantique, la conjecture d'Unique Ergodicité Quantique [RS94]. Cette conjecture est encore largement ouverte, malgré des avancées majeures ([AN07], [DJ18], [DJN22]).

Proposition 3 ([Ing21]) *Si (ϕ_h) est une suite de fonctions propres du laplacien dont la limite locale faible est \mathfrak{f}_{Berry} , alors (ϕ_h) vérifie l'unique ergodicité quantique, au sens où, pour tout $a \in C^\infty(S^*X)$, on a*

$$\langle \text{Op}_h(a)\phi_h, \phi_h \rangle_{L^2} \longrightarrow \int_{S^*X} a(x, \xi) d\mu(x, \xi), \quad (3.8)$$

où Op_h désigne la quantification de Weyl, et μ désigne la mesure de Liouville sur S^*X .

La démonstration de la Proposition 3 est élémentaire lorsque a est une fonction ne dépendant que de x . Si \mathfrak{f}_{Berry} est la limite locale faible dans un ouvert $\mathcal{U} \subset X$, alors c'est aussi la limite locale faible dans tout ouvert $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$: en effet, par la Proposition 2, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe des limites locales faibles $\mathfrak{f}_{\mathcal{U}'}$ et $\mathfrak{f}_{\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'}$, telles que $\mathfrak{f}_{Berry} = \frac{\text{Vol}(\mathcal{U}')}{\text{Vol}(\mathcal{U})} \mathfrak{f}_{\mathcal{U}'} + \frac{\text{Vol}(\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}')}{\text{Vol}(\mathcal{U})} \mathfrak{f}_{\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'}$. Par la Proposition 2, ces limites sont alors invariantes par les translations ; le champ \mathfrak{f}_{Berry} étant ergodique par l'action des translations ([NS15, Appendice B]), on doit avoir $\mathfrak{f}_{\mathcal{U}'} = \mathfrak{f}_{\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'} = \mathfrak{f}_{Berry}$. En prenant une suite de fonctionnelles F_M bornées approchant $F(\phi) = |\phi(0)|^2$, on trouve ainsi que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{U}')} \int_{\mathcal{U}'} |\phi_h(x)|^2 dx = \mathbb{E}[F(\mathfrak{f}_{Berry})] = 1$, d'où le résultat suit.

Le cas d'opérateurs pseudodifférentiels généraux s'obtient lui aussi en écrivant $\langle \text{Op}_h(a)\phi_h, \phi_h \rangle_{L^2}$ comme l'intégrale d'une fonctionnelle continue appliquée à $\phi_{x_0, h}$.

3.3 États lagrangiens propagés et conjecture de Berry

Dans toute la suite de ce chapitre, X sera une variété Riemannienne compacte, connexe, sans bord, et de courbure sectionnelle négative.

La Conjecture 2 semblant actuellement hors de portée, je me suis intéressé à une version plus simple, dans laquelle on considère des états lagrangiens propagés en temps long plutôt que de considérer des fonctions propres du laplacien.

On considérera des états lagrangiens, de la forme

$$f_h(x) = a(x)e^{\frac{i}{h}\varphi(x)}, \quad (3.9)$$

où $a \in C_c^\infty(X)$ et φ est une fonction C^∞ définie dans un voisinage Ω du support de a , ces deux fonctions ne dépendant pas de h . Les fonctions f_h sont microlocalisées sur l'ensemble

$$\Lambda_\varphi := \{(x, \nabla_x \varphi); x \in \Omega\} \subset T^*X. \quad (3.10)$$

On fera l'hypothèse que f_h est *monochromatique*, au sens où pour tout $x \in \text{supp}(a)$, on a $|\nabla \varphi| = 1$, de sorte que $\Lambda_\varphi \subset S^*X$.

La variété X étant de courbure négative, le flot géodésique restreint à S^*X est Anosov [Ebe01]. Ainsi, pour chaque $\rho \in S^*X$, on peut décomposer l'espace $T_\rho S^*X$ comme $T_\rho S^*X = E_\rho^+ \oplus E_\rho^- \oplus E_\rho^0$, les espaces E_ρ^+ , E_ρ^- , E_ρ^0 étant respectivement les directions *instables*, *stables* et *neutre* du flot géodésique en ρ .

On supposera toujours que Λ_φ est *transverse aux directions instables*, au sens où pour tout $\rho \in \Lambda$, on a

$$T_\rho \Lambda \cap E_\rho^- = \{0\}.$$

On notera $e^{it_h \Delta}$ l'opérateur de Schrödinger semiclassique au temps t associé au laplacien semiclassique $-h^2 \Delta$. La conjecture suivante est un analogue de la Conjecture 2 pour les états lagrangiens propagés.

Conjecture 3 *Soit (f_h) une famille d'états lagrangiens de la forme (3.9), associés à une lagrangienne Λ_φ monochromatique transverse aux directions stables. Alors, pour tout $M > 0$ et pour tout t_h tel que $t_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$ avec $t_h \leq M|\log h|$, la famille $(e^{it_h h \Delta} f_h)$ admet pour limite locale faible le champ $\frac{\|a\|_{L^2}}{\sqrt{\text{Vol}(X)}} \mathfrak{f}_{\text{Berry}}$ (voir Définition 3).*

Naturellement, on peut s'attendre à ce que, plus M est grand, plus la conjecture est difficile à démontrer. Ainsi, dans [Sch05], il a été montré que $(e^{it_h h \Delta} f_h)$ vérifiait un analogue de l'unique ergodicité quantique (3.8) lorsque $t_h \leq M_0 |\log h|$ pour un M_0 dépendant de bornes sur le flot géodésique (le temps d'Ehrenfest), mais un tel résultat est inconnu pour $t_h > M_0 |\log h|$.

A défaut d'avoir pu montrer la Conjecture 3 en toute généralité, j'ai pu établir deux résultats dans cette direction : avec Alejandro Rivera, dans [IR22], pour des phases φ génériques et des temps t_h allant vers l'infini très lentement ; et avec Martin Vogel, dans [IV23], pour des temps vérifiant $t_h = o_{h \rightarrow 0}(|\log h|)$, mais en considérant une propagation $(e^{-i\frac{t}{h}P_h^\omega} f_h)$ par une petite perturbation aléatoire de $-h^2\Delta$.

3.3.1 Propagation d'états lagrangiens génériques

Dans [IR22], nous avons considéré une version de la Conjecture 3 pour des états lagrangiens f_h monochromatiques associés à des lagrangiennes Λ_φ génériques parmi les lagrangiennes transverses aux directions stables.

Pour définir une notion de généricité sur de telles lagrangiennes, il pourrait sembler naturel de choisir un ouvert $\Omega \subset X$ où f_h sera défini, et de considérer l'espace

$$\mathcal{E}_1(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ telles que } |\partial\varphi| = 1\}.$$

Néanmoins, travailler avec cet ensemble muni de la topologie C^∞ n'est pas évident, car en général, une perturbation C^∞ d'une fonction $\varphi \in \mathcal{E}_1(\Omega)$ ne sera pas dans $\mathcal{E}_1(\Omega)$. Nous avons donc choisi une autre manière de construire des lagrangiennes monochromatiques, plus simples à perturber.

Soit $\Sigma \subset X$ une hypersurface orientée connexe (et pouvant avoir un bord), et soit ν un champ de vecteur défini sur Σ , tel que pour tout $y \in \Sigma$, $\nu(y)$ est unitaire et orthogonal à $T_y\Sigma$. On note

$$\mathcal{C}(\Sigma) = \{u \in C^\infty(\Sigma) : |\partial u| < 1\}. \quad (3.11)$$

Si $u \in \mathcal{C}(\Sigma)$, on définit, pour chaque $y \in \Sigma$, $v_u(y) := \partial_y u + (1 - |\partial_y u|^2)^{1/2} \nu(y) \in S_y^*X$, et

$$L_u := \{(y, v_u(y)) : y \in \Sigma\}.$$

On définit alors

$$\mathcal{C}^T(\Sigma) := \left\{ u \in \mathcal{C}(\Sigma) \mid \forall y \in \Sigma, T_{(y, v_u(y))} L_u \cap \left(E_{(y, v(y))}^+ \oplus E_{(y, v_u(y))}^0 \right) = \{0\} \right\}. \quad (3.12)$$

Étant donnée $u \in \mathcal{C}(\Sigma)$, on peut montrer qu'il existe un voisinage $\Omega_u \subset X$ de Σ , et une application $\varphi_u \in \mathcal{E}_1(\Omega_u)$ telle que (voir la Figure 3.1)

$$\varphi_u|_\Sigma = u \text{ and } \partial\varphi_u|_\Sigma = v_u, \quad (3.13)$$

et deux telles fonctions doivent coïncider sur un voisinage de Σ . De plus, si $u \in \mathcal{C}^T(\Sigma)$, alors Λ_{φ_u} est transverse aux directions stables.

Théorème 7 ([IR22]) *Il existe un sous-ensemble résiduel $\mathcal{C}^{T,irr}(\Sigma)$ de $\mathcal{C}^T(\Sigma)$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{C}^{T,irr}(\Sigma)$, il existe $T_0 \geq 0$ tel que le résultat suivant soit vrai.*

Soit φ_u et Ω_u comme dans (3.13), et soit $a \in C_c^\infty(\Omega_u)$. Pour chaque $h \in]0, 1[$, notons $f_h(x) = a(x)e^{i\varphi_u(x)/h}$. Soit $\mathcal{U} \subset X$ un ouvert, et soit V un repère orthonormal défini sur \mathcal{U} .

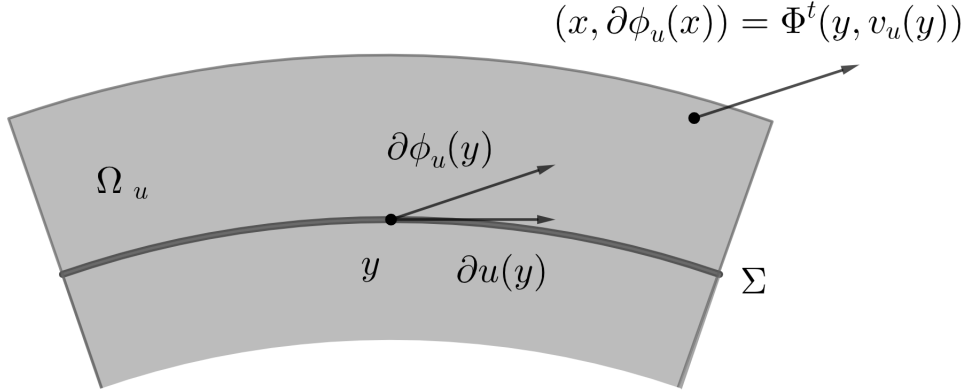


FIGURE 3.1 – Construction de la phase φ_u à partir de u . Ici, Φ^t désigne le flot géodésique sur S^*X .

Pour chaque $t \geq T_0$, la famille $(e^{ith\Delta} f_h)_{h>0}$ admet une limite locale faible \mathfrak{F}_t , dans le repère V et dans l'ouvert \mathcal{U} . De plus, \mathfrak{F}_t converge faiblement vers $\frac{\|a\|_{L^2}}{\sqrt{\text{Vol}(X)}} \mathfrak{f}_{\text{Berry}}$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Ce résultat appelle plusieurs remarques :

- Rappelons qu'un sous-ensemble résiduel est une intersection d'ouverts denses. L'espace $\mathcal{C}^T(\Sigma)$ n'est pas ouvert, car si u est telle que la condition de transversalité est vérifiée sur Σ , mais pas sur $\partial\Sigma$, alors $\mathcal{C}^T(\Sigma)$ contient u , mais pas un voisinage de u . À part de telles u pathologiques, $\mathcal{C}^T(\Sigma)$ contient un voisinage de tous ses points, de sorte que $\mathcal{C}^{T,irr}(\Sigma)$ est non vide, et contient une infinité de fonctions u . Néanmoins, l'ensemble $\mathcal{C}^{T,irr}(\Sigma)$ est défini de façon très implicite, et il n'est pas du tout évident de déterminer si une fonction u appartient ou non à $\mathcal{C}^{T,irr}(\Sigma)$.
- Dans le Théorème 7, on fait d'abord tendre h vers zéro, puis t vers l'infini. Cela signifie que l'on peut trouver $t_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} +\infty$ tel que $(e^{ith\Delta} f_h)_{h>0}$ admette pour limite locale faible $\mathfrak{f}_{\text{Berry}}$, mais la preuve du théorème ne permet pas de quantifier t_h .
- L'ouvert \mathcal{U} (dans lequel le point x_0 est pris uniformément au hasard) peut en réalité dépendre de h , et être de la forme $B(x_1, h^\alpha)$ pour n'importe quel $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. A partir du résultat sur de petits ouverts \mathcal{U} dépendant de h , on peut bien déduire le résultat sur des ouverts \mathcal{U} macroscopiques, grâce au théorème de convergence dominée (les fonctionnelles considérées étant bornées).
- Dans [IR22], nous avons aussi considéré des états lagrangiens non monochromatiques. On obtient alors un résultat analogue au Théorème 7, avec pour limite $\mathfrak{f}_{\mu_{a,\varphi}}$ (voir la Définition 3), où $\mu_{a,\varphi}$ est le poussé en avant de la mesure $|a(x)|^2 dx$ sur X par l'application $X \ni x \mapsto |\partial\varphi(x)| \in]0, \infty[$.

Dans le cas non-monochromatique, la phase appartient à l'espace $\{\varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ telles que } \lambda_1 < |\partial\varphi| < \lambda_2\}$, qui est un ouvert de $C^\infty(\Omega)$, de sorte que la condition de généricité est plus simple à exprimer (mais pas plus explicite).

3.3.2 Un modèle de perturbation aléatoire du laplacien

Le Théorème 7 souffre de trois limitations : le fait qu'il ne marche que pour des phases génériques, et pas pour toutes les phases ; le fait qu'il ne soit vrai que sur des échelles de temps ne pouvant pas être quantifiées ; et, enfin, le fait que les méthodes de preuve introduites dans [IR22], reposant sur des considérations d'indépendance rationnelle entre des directions (voir la section 3.3.4), puisse difficilement être utilisées pour montrer d'autres résultats de chaos quantique (sur les fonctions propres ou sur le propagateur de Schrödinger, par exemple).

Pour pallier ces trois défauts, nous avons cherché, avec Martin Vogel, dans [IV23], à obtenir une variante de la Conjecture 3. Ici, on ne considère plus le propagateur de Schrödinger associé à $-h^2\Delta$, mais à une des perturbations aléatoires dépendant de deux paramètres², $\alpha \in]0, 1[$ et $\beta \in]0, 1/2[$, et de la forme suivante :

$$P_h^\omega := -\frac{h^2}{2}\Delta_g + h^\alpha Q_\omega, \quad (3.14)$$

Plus précisément, on considère deux types de perturbations aléatoires Q_ω :

1. Le cas où Q_ω est un opérateur de multiplication par une fonction à valeurs réelles

$$q_\omega : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{Potentiel aléatoire})$$

appartenant à la classe S_β^0 .

2. Le cas où Q_ω est un opérateur pseudo-différentiel donné par la quantification

$$Q_\omega := \text{Op}_h(q_\omega) \quad (\Psi\text{DO aléatoire})$$

d'une fonction à valeurs réelles

$$q_\omega : T^*X \longrightarrow \mathbb{R}$$

appartenant à la classe de symbole $S_\beta^{-\infty}(T^*X)$.

Décrivons maintenant les modèles de fonctions aléatoires q_ω que l'on considère.

Soit $J_h \subset \mathbb{N}$ un ensemble d'indices de cardinal $|J_h| = O(h^{-M})$, pour un $M > 0$, et soit $\{q_j\}_{j \in J_h}$ une famille de fonctions (dépendant de h) dans $C_c^\infty(X)$ dans le cas (Potentiel aléatoire), et dans $C_c^\infty(T^*X)$ dans le cas (ΨDO aléatoire). Soit $\omega = \{\omega_j\}_{j \in J_h}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On définit

$$q_\omega(z) := \sum_{j \in J_h} \omega_j q_j(z), \quad (3.15)$$

où $z \in X$ dans le cas (Potentiel aléatoire) et $z \in T^*X$ dans le cas (ΨDO aléatoire). On fait les hypothèses suivantes.

2. Des restrictions supplémentaires sur les valeurs pouvant être prises par α et β seront imposées dans l'hypothèse 2 ci-dessous.

Hypothèse 1 (Hypothèses sur les q_j)

1. Chaque q_j a un support de diamètre $O(h^\beta)$ uniformément par rapport à $j \in J_h$.
2. Il existe $C > 0$, indépendant de h , tel que pour tout $z \in X$ (resp. $z \in T^*X$), z appartient au support d'au plus C fonctions q_j .
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k > 0$ tel que

$$\|q_j\|_{C^k} \leq C_k h^{-\beta k} \quad \forall j \in J_h. \quad (3.16)$$

4. Il existe $c_0 > 0$ tel que, pour tout $T > 0$ et tout $\rho \in S^*X$, on a

$$\sum_{j \in J_h} \int_0^T q_j(\Phi^t(\rho)) dt \geq c_0 T. \quad (3.17)$$

Ici, $\Phi^t : S^*X \rightarrow S^*X$ désigne le flot géodésique, et dans le cas (Potentiel aléatoire), $q_j(\rho)$ doit être compris comme $q_j(\pi_X(\rho))$, où $\pi_X : T^*X \rightarrow X$ désigne la projection sur la variété de base X .

Exemple 1 Pour construire une telle famille de potentiels, on peut par exemple recouvrir X (resp. T^*X) par des boules géodésiques $B(\rho_j, h^\beta)$ de rayon h^β centrées en des points ρ_j , de telle sorte que chaque point de X (resp. S^*X) appartienne au plus à C boules. On peut alors prendre

$$q_j = \chi \left(h^{-\beta} \text{dist}(\rho_j, \rho) \right),$$

où $\chi \in C_c^\infty([0, \infty); [0, 1])$ vaut 1 sur $[0, 1]$, et où dist désigne la distance sur X ou sur T^*X respectivement.

On fait les hypothèses suivantes sur les paramètres α et β , représentées sur la Figure 3.2.

Hypothèse 2 (Hypothèses sur les paramètres) On suppose que

$$0 < \beta < \min \left(\frac{\alpha}{2}, 2 - 2\alpha \right). \quad (3.18)$$

Dans le cas (Potentiel aléatoire), on suppose de plus que

$$\beta > 1 - \alpha. \quad (3.19)$$

Une explication heuristique de ces conditions sera donnée dans la Remarque 4, à la fin des idées de démonstration.

Hypothèse 3 (Hypothèses sur les variables aléatoires ω_j) On suppose que les variables $(\omega_j)_{j \in J_h}$ sont i.i.d. et vérifient les hypothèses suivantes :

1. Les ω_j sont presque sûrement bornées.
2. $\text{Var}(\omega_j) > 0$.
3. On suppose que chaque variable ω_j possède une densité C^2 par rapport à la mesure de Lebesgue.

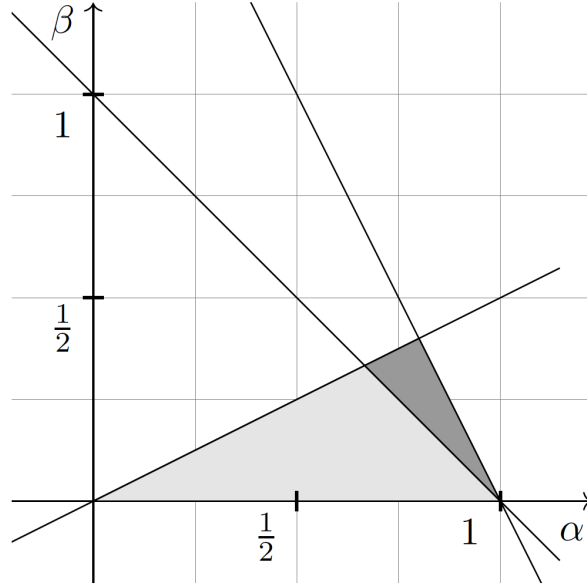


FIGURE 3.2 – Paramètres α et β admissibles. La région en gris sombre est admissible dans les cas (Potentiel aléatoire) et (Ψ DO aléatoire), tandis que la région en gris clair n’est admissible que dans le cas (Ψ DO aléatoire).

3.3.3 Propagation bruitée d’états lagrangiens

Les résultats de [IV23] ne concernent pas toutes les phases associées à des lagrangiennes (3.10) transverses aux directions stables : on a besoin qu’elles fassent un angle suffisamment faible avec les directions instables ; ceci est lié au fait qu’elles doivent être transverses non seulement aux directions stables E^- pour la dynamique engendré par le Hamiltonien $p(x, \xi) = |\xi|^2$, mais aussi aux directions stables $E_{h,\omega}^-$ pour la dynamique des flots perturbés $p_\omega(x, \xi) = |\xi|^2 + h^\alpha q_\omega(x, \xi)$.

Pour simplifier, on supposera ici que φ est tel que Λ_φ est partout tangente à $E^+ \oplus E^0$, c’est-à-dire, que Λ_φ est contenue dans un morceau de la variété faiblement instable d’un point (pour la dynamique non perturbée).

Théorème 8 ([IV23]) *Soit P_h^ω comme dans (3.14), tel que les Hypothèses 1, 2 et 3 soient vérifiées.*

Soit $f_h = ae^{\frac{i}{h}\varphi}$ un état lagrangien monochromatique, associé à une lagrangienne tangente en tout point à $E^+ \oplus E^0$.

Il existe $X_h^0 \subset X$, avec $\text{Vol}(X_h^0) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, tel que le résultat suivant soit vérifié pour tout repère orthonormal V défini dans un ouvert $\mathcal{U} \subset X$.

Soit t_h tel que $\lim_{h \rightarrow 0} t_h = +\infty$ et $t_h = o(|\log h|)$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{U} \setminus X_h^0$

$$\left(e^{-\frac{i}{h}t_h P_h^\omega} f_h \right) (\widetilde{\exp}_x(h \cdot)) \xrightarrow{d} \frac{\|a\|_{L^2}}{\sqrt{\text{Vol}(X)}} \mathfrak{f}_{\text{Berry}}. \quad (3.20)$$

Remarquons qu'ici, le point x est fixé, de sorte que le membre de gauche de (3.20) est une fonction aléatoire dépendant du paramètre aléatoire ω ; la convergence en distribution est donc par rapport à ce paramètre.

Si on a en tête la notion de limite locale faible et la conjecture de Berry, on aurait plutôt envie de fixer ω , et que le paramètre x soit aléatoire; c'est ce que permet de faire le théorème suivant.

Théorème 9 ([IV23]) *On fait les mêmes hypothèses que dans le Théorème 8. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $F \in C_b(C^\infty(\mathbb{R}^d))$, on a*

$$\mathbb{P}_\omega \left[\left| \mathbb{E}_x [F(e^{-\frac{i}{\hbar} t h_j P_{h_j}^\omega} f_h(\widetilde{\text{exp}}_x(h \cdot)))] - \mathbb{E} \left[F \left(\frac{\|a\|_{L^2}}{\sqrt{\text{Vol}(X)}} \mathfrak{f}_{\text{Berry}} \right) \right] \right| \geq \varepsilon \right] = O(h^\infty),$$

l'espérance du premier terme étant calculée par rapport à x choisi uniformément au hasard dans \mathcal{U} .

Le lemme de Borel-Cantelli permet alors de déduire le résultat suivant.

Corollaire 2 *Soit $h_j \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$, une suite telle qu'il existe $M > 0$ telle que $(h_j^M)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$. Alors, ω -presque sûrement, $\frac{\|a\|_{L^2}}{\sqrt{\text{Vol}(X)}} \mathfrak{f}_{\text{Berry}}$ est la limite locale faible de $\left(e^{-\frac{i}{\hbar} t h_j P_{h_j}^\omega} f_{h_j} \right)_{h_j}$ (dans tout repère V défini dans un ouvert \mathcal{U}).*

3.3.4 Idées de démonstration

Propagation d'états lagrangiens génériques L'outil de base de la démonstration du Théorème 7 est la méthode BKW, qui permet de décrire simplement la propagation d'états lagrangiens sur le recouvrement universel \widetilde{X} .

On commence par relever f_h en un état lagrangien \widetilde{f}_h sur le revêtement universel, et on peut écrire que

$$e^{ith\Delta} \widetilde{f}_h \approx \widetilde{a}(\widetilde{x}; t) e^{\frac{i}{\hbar} \widetilde{\varphi}(\widetilde{x}; t)}, \quad (3.21)$$

où $\{\widetilde{x}, \nabla \widetilde{\varphi}(\widetilde{x}; t)\}$ est l'image de $\{\widetilde{x}, \nabla \widetilde{\varphi}(\widetilde{x})\}$ par le flot géodésique, et où \widetilde{a} satisfait une équation de transport.

Quand on projette sur la variété de base X , on doit sommer sur tous les relevés d'un même point x , de sorte que

$$e^{ith\Delta} f_h(x) \approx \sum_{j=1}^{N(t)} a_{j,t}(x) e^{\frac{i}{\hbar} \varphi_{j,t}(x)}, \quad (3.22)$$

où $N(t)$ est fini, mais croît exponentiellement avec t .

On veut alors faire un changement d'échelle autour d'un point x_0 , comme dans (3.5). De plus, on veut prendre le point x_0 dans $B(x_1, h^\alpha)$ pour un $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$. Pour cela, on écrit $x_0 = \widetilde{\text{exp}}_{x_1}(\mathbf{z})$, et on pose

$$\xi_j^{t,x_1} := \nabla (\varphi_{j,t} \circ \widetilde{\text{exp}}_{x_1})(0) \in \mathbb{R}^d. \quad (3.23)$$

Un développement de Taylor permet alors de montrer que

$$\left(e^{ith\Delta} f_h\right) \left(\widetilde{\exp}_{x_0}(hy)\right) \approx \sum_{j=1}^{N(t)} a_{j,t}(x_1) e^{\frac{i}{h}\varphi_{j,t}(x_1)} e^{\frac{i}{h}\mathbf{z}\cdot\xi_j^{t,x_1}} e^{i\mathbf{y}\cdot\xi_j^{t,x_1}}. \quad (3.24)$$

Cette expression correspond à la somme d'un grand nombre d'ondes planes (par rapport à la variable y), avec des phases dépendant du paramètre aléatoire \mathbf{z} .

On peut montrer, en utilisant la transversalité de Thom, que pour des phases initiales génériques, pour tout t et presque tout x_1 , la famille de vecteurs $(\xi_j^{t,x_1})_{j=1,\dots,N(t)}$ est rationnellement indépendante.

Quand on fixe t et que l'on fait tendre h vers zéro, les phases $e^{\frac{i}{h}\mathbf{z}\cdot\xi_j^{t,x_1}}$ vont alors s'équidistribuer sur le tore $(\mathbb{S}^1)^{N(t)}$, de sorte que $(e^{ith\Delta} f_h) \left(\widetilde{\exp}_{x_0}(hy)\right)$ a les mêmes statistiques (quand x_0 parcourt $B(x_1, h^\alpha)$) que

$$\sum_{j=1}^{N(t)} |a_{j,t}(x_1)| e^{i\theta_j} e^{i\mathbf{y}\cdot\xi_j^{t,x_1}},$$

où les θ_j sont des variables uniformes sur $[0, 2\pi[$ deux à deux indépendantes. Le résultat s'obtient alors en utilisant un théorème central limite, et en montrant que la mesure $\sum_{j=1}^{N(t)} |a_{j,t}(x_1)|^2 \delta_{\xi=\xi_j^{t,x_1}} dx_1$ s'équidistribue sur $X \times \mathbb{S}^{d-1}$.

Ce dernier résultat d'équidistribution provient du caractère chaotique de la dynamique : dans [IR22], on choisit de le déduire des résultats de [Sch05] sur les mesures semiclassiques d'états lagrangiens propagés. Une démonstration purement « classique » pourrait aussi être donnée, en vérifiant que la mesure $\sum_{j=1}^{N(t)} |a_{j,t}(x_1)|^2 \delta_{\xi=\xi_j^{t,x_1}} dx_1$ appartient à un espace de Sobolev anisotrope, et son évolution peut être décrite en terme d'états résonants de Ruelle, dans l'esprit des travaux de Liverani, Faure, Sjöstrand, Tsujii... (voir par exemple [?] et les références s'y trouvant.)

Propagation bruitée d'états lagrangiens La démonstration du Théorème 8 repose elle aussi sur la méthode WKB. On montre que, pour les perturbations $h^\alpha Q_\omega$ que l'on considère, on a

$$e^{-i\frac{t}{h}P_h^\omega} \widetilde{f}_h(\tilde{x}) \approx \tilde{a}(\tilde{x}; t) e^{\frac{i}{h}\varphi(\tilde{x}; t)} e^{ih^{\alpha-1}\tilde{\Theta}(\tilde{x}; t, h, \omega)}, \quad (3.25)$$

où \tilde{a} et φ sont les mêmes que dans (3.21), et où $\tilde{\Theta}$ s'exprime comme l'intégrale de q_ω le long de l'unique géodésique joignant $\Lambda_{\tilde{\varphi}}$ à \tilde{x} en temps t .

Ainsi, quand on projette sur la variété de base X et que l'on fait un changement d'échelle autour d'un point x_0 puis un développement limité, comme dans (3.22) et (3.24), on trouve

$$\left(e^{-i\frac{t}{h}P_h^\omega} f_h\right) \left(\widetilde{\exp}_{x_0}(hy)\right) \approx \sum_j a_{j,t}(x_0) e^{\frac{i}{h}\phi_{j,t}(x_0)} e^{ih^{\alpha-1}\Theta(x_0; t, h, \delta)} e^{i\mathbf{y}\cdot\xi_j^{t,x_0}}.$$

On a donc la même expression que dans (3.24), si ce n'est que des phases aléatoires $e^{ih^{\alpha-1}\Theta(x_0;t,h,\delta)}$ sont présentes.

Pour obtenir le Théorème 8, il s'agit donc de montrer que les phases sont indépendantes (pour pouvoir appliquer un théorème central limite), ce qui peut se faire en excluant un ensemble de points x_0 de petit volume. Dans le cas (Potentiel aléatoire), il faut aussi exclure certains petits³ intervalles de temps de l'intégrale définissant Θ , correspondant aux temps où plusieurs trajectoires joignant Λ_φ à un point x_0 sont proches dans X (sans être proches dans S^*X).

Pour obtenir le Théorème 9, on montre que, si x_0 et x'_0 sont à une distance $\leq h^{\beta-\varepsilon}$ l'un de l'autre, alors les phases $\Theta(x_0;t,h,\delta)$ et $\Theta(x'_0;t,h,\delta)$ sont indépendantes l'une de l'autre, pour la plupart des choix de x_0 et x'_0 . Ceci permet de transférer l'aléa venant du paramètre ω en un aléa spatial, obtenu en prenant x_0 au hasard.

Remarque 4 *Les conditions sur β dans l'hypothèse 2 sont à comprendre de la manière suivante.*

- *La force exercée par le Hamiltonien q_ω est de l'ordre de $h^{\alpha-\beta}$: supposer que $h^{\alpha-2\beta} \ll 1$ nous assure donc que les trajectoires classiques perturbée et non perturbée voient les mêmes supports de q_j . Cette hypothèse apparaît partout dans l'application de la méthode WKB, et permet par exemple de s'assurer que $\Theta(x) \approx \Theta(x_0)$ si $x \in B(x_0, h^{\beta-\varepsilon})$.*
- *D'autre part, pour appliquer le théorème central limite, on veut que les variables aléatoires considérées soient centrées, ou plus précisément, que*

$$\mathbb{E}[a_{j,t}(x_0)e^{\frac{i}{h}\phi_{j,t}(x_0)}e^{ih^{\alpha-1}\Theta(x_0;t,h,\delta)}e^{i\mathbf{y}\cdot\xi_j^{t,x_0}}] = O(h^\Gamma),$$

pour un $\Gamma > 0$. Ici, la petitesse de l'espérance vient d'interférences dues à la phase $e^{ih^{\alpha-1}\Theta(x_0;t,h,\delta)}$: une condition naturelle pour espérer de telles interférences est que $h^{\alpha-1}\Theta(x_0;t,h,\delta) \gg 1$. La phase Θ étant une somme d'environ $h^{-\beta}$ variables aléatoires indépendantes de taille h^β , elle est typiquement de l'ordre de $h^{\beta/2}$. On est donc naturellement amenés à supposer que $\beta < 2 - 2\alpha$, ce qui est la deuxième condition de l'hypothèse 2.

C'est également pour obtenir un tel phénomène d'interférences que l'on est amenés à supposer que les variables aléatoires ω_j ont une densité C^2 par rapport à la mesure de Lebesgue.

- *Enfin, la condition $\beta > 1 - \alpha$ apparaît dans le cas d'un Potentiel aléatoire pour des questions d'indépendance entre les phases. Deux phases $\Theta(x_0)$ et $\Theta(x'_0)$, qui s'écrivent comme l'intégrale du potentiel le long de trajectoires, ne sont en général pas indépendantes, car il y a des moments où les trajectoires sont proches (et donc interagissent avec les mêmes $\omega_j q_j$). Le problème se pose peu dans le cas d'un ΨDO aléatoire (car il faudrait que les trajectoires soient proches dans l'espace des phases, ce qui ne se produit en général pas), mais*

3. Notons que, pour pouvoir dire que deux trajectoires différentes ne peuvent pas être très proches pendant un temps long (et donc qu'il suffit de retirer de petits intervalles de temps), le caractère chaotique de la dynamique joue un rôle essentiel.

dans le cas d'un *Potentiel aléatoire*, il y a de nombreux temps auxquels les trajectoires sont proches sur la variété X . L'ensemble des temps problématiques est de longueur $\approx h^\beta$, et pour pouvoir négliger leur contribution, il faut supposer que $\beta > 1 - \alpha$.

3.4 Projets futurs

J'ai pour projet d'utiliser les modèles de perturbations aléatoires P_h^ω de $-h^2\Delta$ introduites dans [IV23] pour étudier les propriétés des fonctions propres d'opérateurs de Schrödinger, et non seulement la propagation d'états lagrangiens.

Ainsi, on peut considérer, pour un t_0 fixé, l'opérateur

$$\mathbf{P}_h^\omega := e^{-i\frac{t_0}{h}\tilde{P}_h^\omega}(-h^2\Delta)e^{i\frac{t_0}{h}\tilde{P}_h^\omega},$$

qui est bien une petite perturbation aléatoire de $-h^2\Delta$, dont les fonctions propres sont de la forme $\psi_h^\omega = e^{-i\frac{t_0}{h}\tilde{P}_h^\omega}\psi_h$, où ψ_h est une fonction propre de $-h^2\Delta$.

La fonction propre ψ_h peut être décomposée comme une somme d'états lagrangiens instables, et l'action de $e^{-i\frac{t_0}{h}\tilde{P}_h^\omega}$ sur chacun peut être décrit à l'aide de (3.25). Les phases aléatoires génèrent alors de nombreuses interférences destructives entre les différents termes.

Avec Martin Vogel, notre premier projet sera d'utiliser ces interférences pour obtenir avec grande probabilité des estimées sur $\|\psi_h^\omega\|_{L^\infty}$. On peut espérer obtenir des améliorations polynômiales en h par rapport à la borne de Hörmander :

$$\|\psi_h^\omega\|_{L^\infty} \leq Ch^{-\frac{d-1}{2}+\delta}\|\psi_h^\omega\|_{L^2} \quad (3.26)$$

pour un $\delta > 0$, là où les meilleures estimées déterministes ne parviennent à améliorer la borne de Hörmander que d'une puissance de $|\log h|$.

Avec Alba Garcia-Ruiz, nous tâchons également d'améliorer les bornes de Hörmander dans le cas d'opérateurs de Schrödinger sur \mathbb{R}^d (dans le "bulk") par des méthodes analogues (mais qui donneront sans doute un δ plus petit).

Une approche semiclassique à la résolution numérique de l'équation de Helmholtz

Contents

4.1	Un tour d'horizon des méthodes numériques pour l'équation de Helmholtz	46
4.2	Une discrétisation de l'équation de Helmholtz à l'aide d'états cohérents gaussiens	47
4.2.1	Le cadre de [CFDI22]	48
4.2.2	Pourquoi discrétiser avec des états cohérents gaussiens?	49
4.2.3	Comment discrétiser avec des états cohérents gaussiens?	50
4.2.4	Présentation des résultats de [CFDI22]	50
4.2.5	Éléments de preuve du Théorème 10	53
4.3	Directions futures	54

L'équation de Helmholtz, qui décrit les ondes en régime harmonique, joue un rôle central dans de nombreuses branches de la physique et de l'ingénierie. Elle prend généralement la forme

$$-\nabla(A\nabla u) - k^2 \mathbf{n}u = f, \quad (4.1)$$

où $k > 0$, $A(x)$ est une famille de matrices symétriques définies positives décrivant l'anisotropie locale du matériau, et où \mathbf{n} est une fonction positive, reliée à la vitesse locale de propagation des ondes. En particulier, dans le cas où $A \equiv \text{Id}$, $\mathbf{n} \equiv 1$, on retrouve l'équation

$$-\Delta u - k^2 u = f. \quad (4.2)$$

Lorsque (4.2) est posée dans \mathbb{R}^d , on peut la résoudre à l'aide de la transformée de Fourier ; en revanche, lorsque les coefficients ne sont pas constants, on ne peut pas résoudre explicitement l'équation (4.1), et on est amené à résoudre numériquement cette équation.

Lorsque le nombre d'onde k augmente, les solutions de (4.1) oscillent de plus en plus rapidement, et, pour la plupart des méthodes numériques, le nombre de degrés de liberté (c'est-à-dire la dimension de l'espace dans lequel on discrétise l'équation) doit augmenter rapidement avec k pour que la méthode converge. Ceci rend la résolution numérique de (4.1) coûteuse, en particulier en dimension $d = 3$,

à des fréquences élevées, mais d'intérêt pratique. Il n'est donc pas surprenant que le développement de méthodes numériques efficaces pour l'équation de Helmholtz à haute fréquence soit un sujet de recherche très actif.

Ce chapitre présentera une approche numérique originale, que j'ai développée avec Théophile Chaumont-Frelet et Victorita Dolean, reposant sur des considérations d'analyse semiclassique ; en effet, dans (4.1), le paramètre k^{-1} peut être vu comme un paramètre semiclassique lorsque k est grand, et il peut donc s'avérer pertinent de construire des méthodes numériques utilisant les propriétés microlocales de la solution u .

Avant de décrire cette approche, il me faut décrire l'état de l'art des méthodes numériques pour l'équation de Helmholtz, et de leur comportement à haute fréquence.

4.1 Un tour d'horizon des méthodes numériques pour l'équation de Helmholtz

On peut diviser les méthodes numériques pour l'équation de Helmholtz en quatre grandes classes :

- Les méthodes les plus populaires reposent sur une discrétisation de l'espace, comme les *méthodes d'éléments finis* (ou *Finite Element Method*, FEM). On considère alors un maillage de l'espace de diamètre h , et un espace de dimension finie formé de polynômes par morceaux, de degré p sur chaque élément du maillage. On écrit alors un problème de Galerkin, c'est-à-dire une formulation faible de l'équation (4.1) sur l'espace de dimension finie.

Une condition nécessaire naturelle pour que la solution du problème discret soit proche de la vraie solution de (4.1) est que $hk \lesssim 1$: comme la solution de (4.1) oscille typiquement à l'échelle k^{-1} , le maillage doit se faire sur une échelle h qui est au moins aussi petite que k^{-1} .

Il est alors naturel de se demander si cette condition est suffisante ; ou, plus généralement, de se demander quelles conditions h et k doivent vérifier pour que la solution du problème discret soit proche de la solution de (4.1). La première réponse à cette question a été donnée dans [BS97], où les auteurs montrent que, pour que la méthode des éléments finis avec des fonctions affines par morceaux ($p = 1$), une condition nécessaire et suffisante pour la convergence est que $hk^2 \gtrsim 1$.

Pour un ordre p plus élevé, on peut montrer que la méthode des éléments finis converge dès que $k^{p+1}h^p \lesssim 1$. Ainsi, avec la méthode des éléments finis, on est amenés à résoudre un système linéaire (creux) de dimension $O(k^{d(1+\frac{1}{p})})$. Remarquons que, bien que la méthode des éléments finis soit connue depuis des décennies, de tels résultats sont récents : ils ont été établis dans les années 2010 dans le cas des coefficients constants [MS10, MS11], et les premières preuves dans le cas des coefficients variables n'ont que quelques années [BCFG17, CFN19, GS20, LSW20, LSW21].

- Les méthodes de type Trefftz utilisent des solutions (exactes ou approchées) explicites du problème libre de Helmholtz. Ainsi, on peut discrétiser l'équation (4.1) dans un espace engendré par des ondes planes ou des fonctions de Bessel (éventuellement par morceaux), éventuellement multipliées ou additionnées à des polynômes. Il existe de très nombreuses méthodes numériques tournant autour de ces idées (voir par exemple [Mel95, MB96, BM97, Sto98, MW99, FHF01, CD03]).
On observe empiriquement que ces méthodes permettent de réduire le nombre de degrés de liberté par rapport aux méthodes d'éléments finis, mais que ce nombre de degrés de liberté demeure un $O(k^d)$. De plus, ces méthodes ont principalement été développées lorsque l'équation (4.1) a des coefficients constants par morceaux.
- Lorsque l'équation (4.1) est à coefficients constants, et est posée à l'intérieur ou à l'extérieur d'un obstacle, il est possible de se ramener à des problèmes au bord, comme dans la *Méthode des éléments finis de frontière* (ou *Boundary Element Method*) [SS10]; on est alors ramenés à discrétiser le bord, ce qui implique de ne considérer essentiellement que $O(k^{d-1})$ degrés de liberté. Néanmoins, les matrices discrètes obtenues de la sorte sont denses, et leurs entrées peuvent être compliquées à calculer; de plus, une telle approche est difficile à généraliser au cas de coefficients qui ne sont pas constants par morceaux.
- Les méthodes asymptotiques utilisent des techniques d'analyse semiclassique, comme l'approximation WKB, les mesures de Wigner ou le front d'onde pour calculer efficacement les solutions de l'équation (4.1), ou du moins certaines de leur propriétés, comme dans [ER03, BCR04, LB15, ZWN⁺21]. Dans des situations géométriques simples (typiquement, celles où les équations eikonales de la méthode WKB ne développent pas de caustiques), ces méthodes permettent un coût de calcul indépendant de k ; néanmoins, elles semblent mal adaptées aux cas où la dynamique classique est plus complexe, par exemple, à celles où certaines trajectoires sont piégées. Enfin, ces méthodes ne sont valables qu'asymptotiquement quand k est grand, mais elles n'approchent pas forcément la solution pour un k fixé.

4.2 Une discrétisation de l'équation de Helmholtz à l'aide d'états cohérents gaussiens

Dans [CFDI22], nous avons proposé avec Victorita Dolean et Théophile Chaumont-Frelet une approche innovante pour résoudre numériquement (4.1), dans laquelle nous discrétisons l'équation dans un espace engendré par des états cohérents gaussiens. Cette approche permet, dans de nombreuses situations d'intérêt, de discrétiser (4.1) en n'utilisant que $O(k^{d-\frac{1}{2}+\varepsilon})$ degrés de liberté (avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit), soit un gain de $\frac{1}{\sqrt{k}}$ par rapport aux $O(k^d)$ degrés de liberté des éléments finis et des méthodes Trefftz. De plus, cette méthode est valable lorsque les

coefficients sont variables, et elle est convergente même lorsque k est fixé (contrairement aux méthodes asymptotiques).

4.2.1 Le cadre de [CFDI22]

Hypothèses sur l'opérateur Dans [CFDI22] l'équation (4.1) est posée dans \mathbb{R}^d , avec des coefficients lisses vérifiant $A \equiv \text{Id}$, $\mathbf{n} \equiv 1$ en dehors d'un compact (la région d'interaction), et avec les conditions de Sommerfeld à l'infini :

$$\frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - ik u(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|x|^{(d-1)/2}} \right). \quad (4.3)$$

En pratique, les conditions de Sommerfeld sont implémentées à l'aide d'une couche absorbante parfaitement adaptée (ou *Perfectly Matched Layer*), suivant [Bé94], c'est-à-dire en ajoutant des termes non-autoadjoints en dehors de la région d'interaction. Cette méthode est aussi connue sous le nom de *distorsion analytique* (ou *Complex Scaling*, voir [DZ19b]).

Quitte à la diviser par k^2 , l'équation (4.1) avec la condition (4.3) peut donc se réécrire comme¹

$$P_k u = f, \quad (4.4)$$

où P_k est un opérateur différentiel non auto-adjoint, de degré 2, où chaque dérivée apparaît multipliée par un facteur k^{-1} . On note alors $p(x, \xi)$ le symbole de P_k : il s'agit de la fonction lisse sur \mathbb{R}^{2d} obtenue en remplaçant chaque $ik^{-1}\partial_j$ par ξ_j . Ainsi, $p(x, \xi)$ s'écrit comme $-\langle \xi, A(x)\xi \rangle + n(x)$, plus des termes complexes correspondant à la couche absorbante.

Lorsque P_k est de cette forme, il est toujours inversible, de sorte que la solution u de (4.4) est unique. Il nous faut néanmoins faire une hypothèse supplémentaire, sur la croissance de la norme de l'inverse avec k : on supposera dans la suite qu'il existe $C, N_0 > 0$ tels que

$$\|P_k^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C(kR)^{N_0} \quad (4.5)$$

Cette hypothèse de borne polynomiale sur la résolvante est très courante dans l'analyse de schémas numériques, et on sait qu'elle est vérifiée dans de nombreuses situations :

- Lorsque la dynamique classique engendrée par le Hamiltonien p n'a pas de trajectoires piégées, alors (4.5) est vérifiée, avec $N_0 = 1$ (voir par exemple [GSW19]).
- Lorsque la dynamique induite par p a un ensemble piégé sur lequel la dynamique est hyperbolique, il a été conjecturé dans [Zwo17] que (4.5) était toujours vérifiée. Cette conjecture a été montrée lorsque l'ensemble piégé est « suffisamment filamentaire » (voir [Non11, NZ09]), ainsi que pour la diffusion par des obstacles convexes en dimension 2 [Vac22].

1. On note encore ici f le second membre, bien qu'il corresponde à $k^{-2}f$ dans (4.1).

- Sans aucune hypothèse sur la dynamique, il a été montré dans [LSW19] que (4.5) est vérifiée, quitte à exclure un ensemble de fréquences dont l'intersection avec $\{k \geq k_0\}$ a une longueur qui tend vers zéro lorsque $k_0 \rightarrow +\infty$.

Hypothèses sur le second membre L'approche développée dans [CFDI22] est principalement pertinente lorsque le second membre est *microlocalisé près du lieu d'annulation du symbole de l'opérateur*, comme expliqué dans la section suivante.

Un cas particulièrement important, aussi bien d'un point de vue pratique que théorique, est le problème de la diffusion des ondes planes, dans lequel on cherche, pour chaque direction d'incidence $\vec{d} \in \mathbb{R}^d$ avec $|\vec{d}| = 1$, une solution de l'équation

$$-\nabla(A\nabla u) - k^2 \mathbf{n}u = 0$$

pouvant s'écrire sous la forme

$$u(x) = e^{ik\vec{d}\cdot x} + u_{out}(x),$$

où u_{out} vérifie la condition de Sommerfeld (4.3).

On peut alors montrer que ce problème se ramène à résoudre l'équation (4.1) avec pour second membre la fonction à support compact

$$f = (k^2 \mathbf{n} + \nabla(A\nabla \cdot)) e^{ik\vec{d}\cdot x}. \quad (4.6)$$

4.2.2 Pourquoi discrétiser avec des états cohérents gaussiens ?

L'un des outils centraux en analyse semiclassique est la notion de *front d'onde*, qui est une partie $\text{WF}_h(u)$ de \mathbb{R}^{2d} associée à une famille de fonctions $u = (u_h)$ dépendant d'un petit paramètre h . De manière informelle, $(x, \xi) \in \text{WF}_h(u)$ si, au voisinage de x , u_h a des oscillations non négligeables, à l'échelle h , dans la direction ξ .

Un résultat classique (voir par exemple [DZ19b, Theorem E.38]) affirme que, si u est solution de (4.4), alors on a

$$\text{WF}_{k-1}(u) \subset \text{WF}_{k-1}(f) \cup \left\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}; p(x, \xi) = 0 \right\}.$$

En particulier, pour un second membre de la forme (4.6), le premier ensemble est inclus dans le deuxième, de sorte que

$$\text{WF}_{k-1}(u) \subset \left\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}; p(x, \xi) = 0 \right\}.$$

Ainsi, la solution de (4.1) est localisée, dans l'espace des phases \mathbb{R}^{2d} , là où le symbole p est petit ; il est donc naturel de construire un espace de discrétisation formé de fonctions qui sont elles aussi localisées là où p est petit !

Remarquons que les polynômes par morceaux de la méthode des éléments finis sont très bien localisés en position, mais très délocalisés dans l'espace de Fourier ; en revanche, les ondes planes apparaissant dans les méthodes d'éléments finis de

frontières et dans certaines méthodes Trefftz sont très bien localisées dans l'espace de Fourier, mais sont très délocalisées spatialement : ainsi, ces fonctions ne sont pas localisées uniquement là où le symbole p est petit.

Une famille naturelle de fonctions localisées dans l'espace des phases est celle des états cohérents gaussiens, de la forme

$$\psi_{x_0, \xi_0, k}(x) := \left(\frac{k}{\pi}\right)^{d/4} e^{ik(x-x_0) \cdot \xi_0} e^{-k \frac{|x-x_0|^2}{2}},$$

où $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^d$. Ces fonctions vérifient $\text{WF}_{k^{-1}}(\psi_{x_0, \xi_0, k}) = \{(x_0, \xi_0)\}$.

4.2.3 Comment discrétiser avec des états cohérents gaussiens ?

Il est courant en analyse des EDP, et en particulier en analyse semiclassique, de décomposer une fonction à l'aide d'une somme *continue* d'états cohérents gaussiens, grâce à la formule suivante, dont la preuve peut être trouvée par exemple dans [RC12, Chapitre 1]

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad g = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \langle g, \psi_{x_0, \xi_0, k} \rangle \psi_{x_0, \xi_0, k} dx_0 d\xi_0.$$

Néanmoins, une telle décomposition est mal adaptée à l'analyse numérique, où l'on souhaite travailler avec des espaces de dimension finie, engendrés par un ensemble discret, et non continu d'états cohérents.

L'idée de décomposer les fonctions comme des combinaisons linéaires discrètes d'états cohérents gaussiens se trouve initialement dans les travaux de Gabor [Gab46], mais elle a pris sa forme moderne dans l'article [DGM86], où les auteurs montrent que la famille

$$\begin{aligned} \Psi_{m,n,k} &:= \psi_{x_{m,k}, \xi_{n,k}, k}, \quad m, n \in \mathbb{Z}^d \\ x_{m,k} &:= m \sqrt{\frac{\pi}{k}}, \quad \xi_{n,k} := n \sqrt{\frac{\pi}{k}} \end{aligned}$$

forme un *frame* (ou *cadre* pour les francophones). Cela signifie que, pour toute fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la quantité $\|g\|_{L^2}^2$ est comparable avec $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}^d} |\langle g, \Psi_{m,n,k} \rangle|^2$. De plus, les constantes sont ici indépendantes de k .

Cette propriété implique que la famille $(\Psi_{m,n,k})_{m,n \in \mathbb{Z}^d}$ a de nombreux points communs avec une base orthonormale, bien qu'elle ne soit pas linéairement indépendante.

4.2.4 Présentation des résultats de [CFDI22]

Suivant l'intuition donnée par l'analyse semiclassique, on considère l'espace engendré par les $\Psi_{m,n,k}$ microlocalisés là où le symbole p est petit :

$$W_{k,\varepsilon} := \text{Vect}\{\Psi_{m,n,k}; |p(x_{m,k}, \xi_{n,k})| < k^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\}. \quad (4.7)$$

Cet espace est schématisé sur la figure 4.1. Remarquons qu'il est de dimension $O(k^{d-\frac{1}{2}+\varepsilon})$, du moins lorsque ∇p ne s'annule pas sur $\{p = 0\}$.

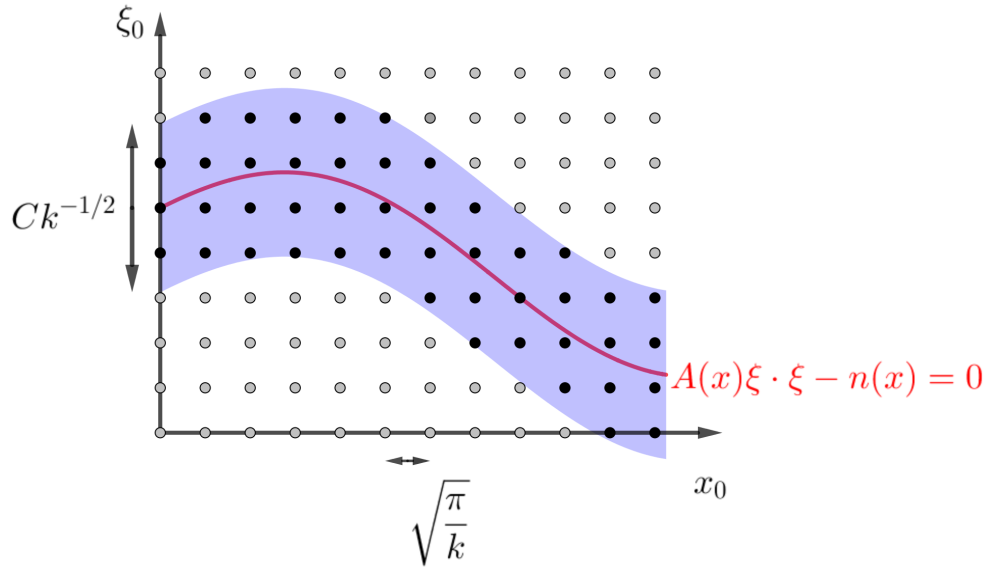


FIGURE 4.1 – Une solution de l'équation de Helmholtz avec un second membre comme dans (4.6) peut être représentée en n'utilisant que états cohérents gaussiens microlocalisés sur les points en noir ; pour une fonction générale, les états gaussiens microlocalisés sur les points en gris seraient aussi nécessaires.

Théorème 10 [CFDI22] Soit P_k une famille d'opérateurs comme dans la section 4.2.1. Pour tout $s \geq 0$, et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $k \geq 1$, on a le résultat suivant. Si $u = u_k$ est la solution de l'équation $P_k u = f$, avec f comme dans la section 4.2.1, on a

$$\inf_{v_k \in W_{k,\varepsilon}} \|u_k - v_k\|_{H^s} \leq C_{N,s} k^{-N}.$$

En fait, ce théorème peut se généraliser à des seconds membres f plus généraux que (4.6) : l'important est que f puisse être bien approchée par un élément de $W_{k,\frac{\varepsilon}{2}}$, comme nous l'expliquerons en section 4.2.5.

Le Théorème 10 nous garantit que la solution de l'équation (4.1) peut bien s'approcher dans l'espace $W_{k,\varepsilon}$; néanmoins, ce résultat n'est qu'asymptotique, l'erreur d'approximation ne devenant petite que dans la limite où $k \rightarrow \infty$.

Naturellement, en pratique, k est grand, mais fixé, et on veut pouvoir approcher la solution u de (4.1) dans un espace engendré par suffisamment d'états cohérents gaussiens. Le théorème suivant nous donne un résultat de cette nature, et est valable quel que soit $k > 0$ (pas nécessairement grand), et pour des second membres beaucoup plus généraux que ceux du Théorème 10.

Théorème 11 [CFDI22] Soit P_k une famille d'opérateurs comme dans la section

4.2.1, avec N_0 comme dans (4.5). Pour chaque $\varrho, k > 0$, on définit l'espace

$$W_\varrho(k) := \text{Vect}\{\Psi_{m,n,k}; |m|^2 + |n|^2 \leq \varrho(kR)^{N_0}\}.$$

Pour tout $0 \leq s \leq p + 2$, pour tout $R, p > 0$ il existe $C > 0$ telle que, si $f \in H^p(\mathbb{R}^d)$ supportée dans $B(0, R)$, et si u_k est la solution de l'équation $P_k u_k = f$, on a, pour tout $k \geq 1$

$$\inf_{v \in W_\varrho(k)} \|u_k - v\|_{H^s} \leq C \varrho^{-2+s-p} \|f\|_{H^p}.$$

Supposons que $N_0 = 1$ dans (4.5). Le Théorème 11 nous dit donc que, pour bien approcher la solution u pour un second membre général $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on peut, lorsque k est grand, se placer dans l'espace W_{k^ε} , dont la dimension est $k^{d+O(\varepsilon)}$, pour n'importe quel ε : on retrouve donc les $O(k^d)$ degrés de libertés nécessaires aux méthodes d'éléments finis. Cela n'est pas surprenant : sans hypothèse sur le second membre, la solution u n'a pas de raison d'être microlocalisée dans une petite région de l'espace des phases, comme indiqué dans la figure 4.1.

Applications numériques Pour discrétiser une équation comme (4.4) dans un espace W , l'approche la plus naturelle est celle de Galerkin, consistant à considérer une formulation faible de l'équation dans W :

$$\text{Trouver } v \in W \text{ telle que, pour tout } w \in W, \langle P_k v, w \rangle_{L^2} = \langle f, w \rangle_{L^2}. \quad (4.8)$$

Une variante, la méthode des moindres carrés, consiste à regarder le problème suivant :

$$\text{Trouver } v \in W \text{ telle que, pour tout } w \in W, \langle P_k v, P_k w \rangle_{L^2} = \langle f, P_k w \rangle_{L^2}. \quad (4.9)$$

La méthode de Galerkin est souvent la plus pertinente pour les applications (par exemple parce que, dans la méthode de Galerkin, W peut ne contenir que des fonctions H^1 , alors que dans la méthode des moindres carrés, W doit être inclus dans H^2). Néanmoins, la méthode des moindres carrés est la plus simple à analyser mathématiquement, car la solution v de (4.9) existe toujours et est unique. De plus, si u est la solution de (4.4), on a

$$\|P_k(u - v)\|_{L^2} = \min_{w \in W} \|P_k(u - w)\|.$$

Autrement dit, la méthode des moindres carrés permet de minimiser la distance à u dans l'espace W , au sens de la norme $w \mapsto \|P_k w\|$.

Corollaire 3 Soient P_k et f comme dans la section 4.2.1, et soit $\varepsilon > 0$. Soit v la solution du problème des moindres carrés (4.9) dans l'espace $W_{k,\varepsilon}$, et soit u la solution de (4.4). Alors, pour tout $s, N \geq 0$, il existe $C > 0$ telle que, pour tout $k \geq 1$

$$\|u - v\|_{H^s} \leq C k^{-N}.$$

Autrement dit, à haute fréquence, on peut approcher la solution du problème continu en résolvant le problème linéaire (4.9) dans un espace de dimension $O(k^{d-\frac{1}{2}+\varepsilon})$, soit bien moins que la dimension $O(k^d)$ nécessaire pour la méthode des éléments finis. Remarquons néanmoins que notre approche ne donne pas de résultats sur la convergence de la méthode de Galerkin (4.8) dans les espaces $W_{k,\varepsilon}$.

4.2.5 Éléments de preuve du Théorème 10

Le fait que la famille $(\Psi_{m,n,k})_{m,n \in \mathbb{Z}^d}$ soit un frame implique l'existence d'un *frame dual* $(\Psi_{m,n,k}^*)_{m,n \in \mathbb{Z}^d}$, tel que, pour tout $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned} g &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^d} \langle g, \Psi_{m,n,k} \rangle \Psi_{m,n,k}^* \\ g &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}^d} \langle g, \Psi_{m,n,k}^* \rangle \Psi_{m,n,k}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

bien que de telles décompositions ne soient pas uniques. On peut de plus montrer que les fonctions $\Psi_{m,n,k}^*$ sont elles aussi microlocalisées près du point $(x_{m,k}, \xi_{n,k})$. Plus précisément, on peut trouver des coefficients $U_{m,n,k}$, bornés indépendamment de k , tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\Psi_{m,n,k}^* = \sum_{\substack{m',n' \in \mathbb{Z}^d \\ |m-m'|+|n-n'| \leq k^{-\varepsilon}}} U_{m-m',n-n',k} \Psi_{m,n,k} + O(k^{-\infty}). \quad (4.11)$$

En combinant les équations (4.10) et (4.11), on voit que, pour montrer qu'une fonction g peut être approchée dans un espace $W_{k,\varepsilon}$ de la forme (4.7), il suffit essentiellement de montrer que $\langle g, \Psi_{m,n,k} \rangle = O(k^{-\infty})$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{Z}^{2d} \setminus W_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Cette approche permet de montrer que le second membre f de la forme (4.6) peut être approché par un élément de $W_{k,\frac{\varepsilon}{3}}$, avec une erreur $O(k^{-\infty})$ dans toute norme H^s . En effet, les produits scalaires $\langle f, \Psi_{m,n,k} \rangle$ peuvent être estimés directement par la méthode de la phase non stationnaire, c'est-à-dire par intégrations par parties successives.

Pour estimer $\langle u_k, \Psi_{m,n,k} \rangle$ pour $(m,n) \in \mathbb{Z}^{2d} \setminus W_{\frac{\varepsilon}{2}}$, on écrit

$$u_k = \frac{1}{p(x_{m,k}, \xi_{n,k})} P_k u_k + \frac{1}{p(x_{m,k}, \xi_{n,k})} (P_k - p(x_{m,k}, \xi_{n,k})) u_k, \quad (4.12)$$

de sorte que

$$\langle u_k, \Psi_{m,n,k} \rangle = \frac{1}{p(x_{m,k}, \xi_{n,k})} [\langle f, \Psi_{m,n,k} \rangle + \langle u, (P_k^* - \bar{p}(x_{m,k}, \xi_{n,k})) \Psi_{m,n,k} \rangle]. \quad (4.13)$$

Le premier terme est un $O(k^{-\infty})$, du fait de l'appartenance de f à $W_{k,\frac{\varepsilon}{3}}$. Quand au second terme, un calcul élémentaire donne que $\|(P_k^* - \bar{p}(x_{m,k}, \xi_{n,k})) \Psi_{m,n,k}\|_{L^2} = O(k^{-\frac{1}{2}})$, tandis que $\frac{1}{p(x_{m,k}, \xi_{n,k})} = O(k^{\frac{1-\varepsilon}{2}})$ par définition de $W_{k,\frac{\varepsilon}{2}}$. Le second terme de (4.13) est donc un $O(k^{-\varepsilon})$. Il est alors possible d'itérer l'équation (4.12), chaque itération permettant de gagner un facteur $O(k^{-\varepsilon})$. On en déduit le résultat.

4.3 Directions futures

Bases de Wilson. Bien que le problème de dimension fini (4.9) soit bien posé dans les espaces $W_{k,\varepsilon}$, des résultats numériques préliminaires montrent que ce problème est très mal conditionné, tout comme le problème (4.8). Ceci est lié au fait que, bien que les $(\Psi_{m,n,k})_{(m,n)\in\Lambda}$ forment une famille libre lorsque $(m,n) \in \Lambda$ appartient à un ensemble fini, en pratique, elles se comportent comme une famille liée dès que Λ est grand, car on peut avoir des combinaisons linéaires finies de $\Psi_{m,n,k}$ qui sont minuscules, alors que les coefficients ne le sont pas. Ainsi, si on définit la quantité

$$\sigma(N) := \inf_{(c_{m,n}) \in \mathbb{R}^{2Nd}} \frac{\left\| \sum_{|m|,|n| \leq N} c_{m,n} \Psi_{m,n,k} \right\|_{L^2}}{\|c_{m,n}\|_{\ell^2}},$$

il a été montré dans [Grö15] que l'on a $\sigma(N) = O_{N \rightarrow \infty}(e^{-c_\varepsilon N^{1-\varepsilon}})$ pour tout $\varepsilon > 0$. Des bornes inférieures sur $\sigma(N)$ ont été données dans [CL01], mais elles sont exprimées d'une manière récursive peu explicite, et semblent beaucoup plus petites que e^{-cN} .

Il est donc naturel de chercher à remplacer les $(\Psi_{m,n,k})$ par une autre famille de fonction, mieux conditionnée, et ayant des propriétés microlocales analogues. On peut ainsi considérer des *bases de Wilson*, qui s'écrivent (en dimension 1), comme

$$\Phi_{m,n,k} = \Psi_{m,n,k} + (-1)^{m+n} \Psi_{m,-n,k} \quad (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad (4.14)$$

et des expressions analogues existent en dimension supérieure, en tensorialisant la formule (4.14). Il a été montré ([DJJ91], [Aus21], [Grö01, Chapitre 8.5]) qu'une telle famille forme une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R}^d)$. On peut alors définir des espaces $W_{k,\varepsilon}^\Phi$ de la même manière que dans (4.7), mais à l'aide des fonctions $\Phi_{m,n,k}$. De tels espaces seront encore de dimension $O(k^{d-\frac{1}{2}+\varepsilon})$.

L'un des objectifs principaux de la thèse de doctorat de Florentin Proust, que je co-encadre avec Victorita Dolean et Théophile Chaumont-Frelet, sera de montrer la convergence de la méthode de Galerkin (4.8) dans les espaces $W_{k,\varepsilon}^\Phi$, et de montrer que le problème discret est beaucoup mieux conditionné dans les espaces $W_{k,\varepsilon}^\Phi$ que dans les espaces $W_{k,\varepsilon}$ de (4.7).

Coefficients non lisses. Tous les résultats de [CFDI22] présentés dans ce chapitre nécessitent que l'équation de Helmholtz soit posée dans \mathbb{R}^d , avec des coefficients lisses. Néanmoins, dans la plupart des applications, l'équation (4.1) est posée à l'intérieur ou à l'extérieur d'un ouvert borné, avec des conditions de Dirichlet ou de Neumann au bord. De plus, les coefficients sont souvent non lisses (mais les discontinuités ne se produisent le plus souvent que le long de sous-variétés). L'un de mes projets de recherche sera donc d'adapter les résultats de [CFDI22] à de telles situations géométriques.

- Lorsque l'équation (4.1) présente une discontinuité en dehors de la divergence, on peut espérer adapter la méthode de [CFDI22]. En effet, les fonctions

$\Psi_{m,n,k}$ appartiennent encore au domaine de l'opérateur P_k , et la méthode (4.9) a encore un sens. On peut donc espérer montrer la convergence de (4.9) dans l'espace $W_{k,\varepsilon}$, à condition d'ajouter à cet espace de nombreux états gaussiens près des discontinuités des coefficients (là où la solution n'est pas lisse). Si les discontinuités se trouvent sur une hypersurface, l'espace de discrétisation considéré sera encore de dimension $O(k^{d-\frac{1}{2}+\varepsilon})$.

- Lorsque la discontinuité est hors de la divergence (ou lorsqu'on considère des conditions de Dirichlet au bord), on ne peut plus utiliser les fonctions $\Psi_{m,n,k}$ ou $\Phi_{m,n,k}$, qui n'appartiennent pas au domaine de l'opérateur.

Une première étape sera donc de remplacer les états cohérents gaussiens $\Psi_{m,n,k}$ par des états cohérents à support compact, de la forme $c_k e^{ik(x-x_0)\cdot\xi_0} \chi(-k|x-x_0|^2)$, avec $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. De telles fonctions pourront être utilisées pour engendrer l'espace $W_{k,\varepsilon}$, loin des discontinuités ou des bords. Près des discontinuités ou des bords, on doit pouvoir remplacer ces fonctions par des états cohérents adaptés, ou simplement par des polynômes par morceaux, qui vérifieront les bonnes conditions aux limites.

Réduire encore le nombre de degrés de liberté ? Utiliser des états cohérents plutôt que des polynômes par morceaux permet, dans certaines situations, de réduire le nombre de degrés de libertés nécessaires pour résoudre (4.1) de $O(k^d)$ à $O(k^{d-\frac{1}{2}})$. On peut se demander si, en utilisant d'autres familles de fonctions, on peut encore réduire le nombre de degrés de liberté.

Lorsque l'on considère l'équation à coefficients constants (4.2) avec un second membre microlocalisé sur une couche d'énergie, la solution u peut être approchée à l'aide de $O(k^{d-1+\varepsilon})$ ondes planes. Pour l'équation à coefficients variables (4.1), il est naturel de chercher à approcher la solution en utilisant des états lagrangiens, de la forme $a(x)e^{ik\phi(x)}$, et on doit encore pouvoir le faire en utilisant $O(k^{d-1+\varepsilon})$ telles fonctions.

Néanmoins, déterminer efficacement les fonctions $a(x)$ et $\phi(x)$ n'a rien d'évident, et il n'est pas évident d'adapter la preuve de [CFDI22] à des espaces $W_{k,\varepsilon}$ construits à partir de telles familles de fonctions. De plus, du fait du caractère délocalisé de telles fonctions (comparées aux états cohérents $\Psi_{m,n,k}$), on peut difficilement espérer les utiliser dans le cas d'une équation à coefficients discontinus, comme dans le chapitre précédent. Il est donc probable que cet axe de recherche ait un intérêt théorique bien plus qu'applicatif, contrairement au reste de ce chapitre.

Bibliographie

- [ABB⁺17] M. Abért, N. Bergeron, I. Biringer, T. Gelander, N. Nikolav, J. Raimbault, and I. Samet. On the growth of L^2 -invariants for sequences of lattices in Lie groups. *Annals of Mathematics*, 185(3) :711–790, 2017. (Cité en page 8.)
- [ABM23] M. Abért, N. Bergeron, and E. Le Masson. Eigenfunctions and random waves in the Benjamini-Schramm limit. *Journal of Topology and Analysis*, 2023. (Cité en page 32.)
- [ABST99] R. Aurich, A. Bäcker, R. Schubert, and M. Taglieber. Maximum norms of chaotic quantum eigenstates and random waves. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 129(1-2) :1–14, 1999. (Cité en page 33.)
- [AISW21a] N. Anantharaman, M. Ingremeau, M. Sabri, and B. Winn. Absolutely continuous spectrum for quantum trees. *Communications in Mathematical Physics*, 383 :537–594, 2021. (Cité en page 13.)
- [AISW21b] N. Anantharaman, M. Ingremeau, M. Sabri, and B. Winn. Empirical measures of quantum graphs in the Benjamini-Schramm limit. *J. Funct. Anal*, page 108988, 2021. (Cité en pages 5 et 8.)
- [AISW21c] N. Anantharaman, M. Ingremeau, M. Sabri, and B. Winn. Quantum ergodicity for expanding quantum graphs in the regime of spectral delocalization. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 151 :28–98, 2021. (Cité en pages 10, 12 et 13.)
- [AM15] N. Anantharaman and E. Le Masson. Quantum ergodicity on large regular graphs. *Duke Mathematical Journal*, 164(4) :723–765, 2015. (Cité en pages 11 et 12.)
- [AN07] N. Anantharaman and S. Nonnenmacher. Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold. *Annales de l’institut Fourier*, 57(7) :2465–2523, 2007. (Cité en page 33.)
- [Ana17] N. Anantharaman. Quantum ergodicity on regular graphs. *Communications in Mathematical Physics*, 353(2) :633–690, 2017. (Cité en pages 11 et 12.)
- [AS93] R. Aurich and F. Steiner. Statistical properties of highly excited quantum eigenstates of a strongly chaotic system. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 64(1-3) :185–214, 1993. (Cité en page 32.)
- [AS19] N. Anantharaman and M. Sabri. Quantum ergodicity on graphs : from spectral to spatial delocalization. *Annals of Mathematics*, 189(3) :753–835, 2019. (Cité en pages 12 et 15.)
- [ATV13] M. Abért, A. Thom, and B. Virág. Benjamini-Schramm convergence and pointwise convergence of the spectral measure. *preprint*, 2013. (Cité en page 8.)

- [Aus21] P. Auscher. Remarks on the local Fourier bases. In *Wavelets*, pages 203–218. CRC Press, 2021. (Cité en page 54.)
- [Bar06] A. Barnett. Asymptotic rate of quantum ergodicity in chaotic Euclidean billiards. *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 59(10) :1457–1488, 2006. (Cité en page 32.)
- [BCFG17] H. Barucq, T. Chaumont-Frelet, and C. Gout. Stability analysis of heterogeneous Helmholtz problems and finite element solution based on propagation media approximation. *Math. Comp.*, 86(307) :2129–2157, 2017. (Cité en page 46.)
- [BCR04] J.-D. Benamou, F. Collino, and O. Runborg. Numerical microlocal analysis of harmonic wavefields. *J. of Comput. Phys.*, 199(2) :717–741, 2004. (Cité en page 47.)
- [Ber77] M.V. Berry. Regular and irregular semiclassical wavefunctions. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 10(12) :2083, 1977. (Cité en pages 29 et 32.)
- [BG01] F. Barra and P. Gaspard. Transport and dynamics on open quantum graphs. *Physical review E*, 65(1) :016205, 2001. (Cité en page 25.)
- [BK13] D. Beliaev and Z. Kereta. On the Bogomolny–Schmit conjecture. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 46(45) :455003, 2013. (Cité en page 29.)
- [BKS07] G. Berkolaiko, J.P. Keating, and U. Smilansky. Quantum ergodicity for graphs related to interval maps. *Communications in mathematical physics*, 273 :137–159, 2007. (Cité en page 10.)
- [BKW04] G. Berkolaiko, J.P. Keating, and B. Winn. No quantum ergodicity for star graphs. *Communications in mathematical physics*, 250 :259–285, 2004. (Cité en page 10.)
- [BM97] I. Babuška and J. M. Melenk. The partition of unity method. *International journal for numerical methods in engineering*, 40(4) :727–758, 1997. (Cité en page 47.)
- [Bor07] D. Borthwick. *Spectral theory of infinite-area hyperbolic surfaces*. Birkhäuser, 2007. (Cité en page 25.)
- [Bou14] J. Bourgain. On toral eigenfunctions and the random wave model. *Israel Journal of Mathematics*, 201(2) :611–630, 2014. (Cité en page 32.)
- [BS97] I. Babuška and S.A. Sauter. Is the pollution effect of the FEM avoidable for the Helmholtz equation considering high wave numbers? *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(6) :2392–2423, 1997. (Cité en page 46.)
- [BS02] E. Bogomolny and C. Schmit. Percolation model for nodal domains of chaotic wave functions. *Physical Review Letters*, 88(11) :114102, 2002. (Cité en page 29.)

- [BS11] I. Benjamini and O. Schramm. Recurrence of distributional limits of finite planar graphs. *Selected Works of Oded Schramm*, pages 533–545, 2011. (Cité en page 5.)
- [BSS98] A. Bäcker, R. Schubert, and P. Stifter. Rate of quantum ergodicity in Euclidean billiards. *Physical Review E*, 57(5) :5425, 1998. (Cité en page 32.)
- [BW10] G. Berkolaiko and B. Winn. Relationship between scattering matrix and spectrum of quantum graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 362(12) :6261–6277, 2010. (Cité en page 10.)
- [BW15] J. Buckley and I. Wigman. On the number of nodal domains of toral eigenfunctions. *arXiv preprint arXiv :1511.04382*, 2015. (Cité en page 32.)
- [BW16] M. Brammall and B. Winn. Quantum ergodicity for quantum graphs without back-scattering. 17 :1353–1382, 2016. (Cité en page 10.)
- [BW18] G. Berkolaiko and B. Winn. Maximal scarring for eigenfunctions of quantum graphs. *Nonlinearity*, 31(10) :4812, 2018. (Cité en page 9.)
- [Bé94] J. P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114 :185–200, 1994. (Cité en page 48.)
- [Car97] R. Carlson. Hill’s equation for a homogeneous tree. *Electronic Journal of Differential Equations*, 1997(23) :1–30, 1997. (Cité en page 11.)
- [CD03] O. Cessenat and B. Després. Using plane waves as base functions for solving time harmonic equations with the ultra weak variational formulation. *J. Comput. Acous.*, 11(02) :227–238, 2003. (Cité en page 47.)
- [CDV85] Y. Colin De Verdière. Ergodicité et fonctions propres du laplacien. *Communications in Mathematical Physics*, 102(3) :497–502, 1985. (Cité en page 11.)
- [CdV15] Y. Colin de Verdière. Semi-classical measures on quantum graphs and the Gauß map of the determinant manifold. 16(2) :347–364, 2015. (Cité en page 9.)
- [CdVT18] Y. Colin de Verdière and F. Truc. Topological resonances on quantum graphs. *Ann. Henri Poincaré*, pages 1419–1438, 2018. (Cité en pages 20 et 25.)
- [CFDI22] T. Chaumont-Frelet, V. Dolean, and M. Ingremeau. Efficient approximation of high-frequency Helmholtz solutions by Gaussian coherent states. *arXiv preprint arXiv :2208.04851*, 2022. (Cité en pages iii, iv, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 54 et 55.)
- [CFN19] T. Chaumont-Frelet and S. Nicaise. Wavenumber explicit convergence analysis for finite element discretizations of general wave propagation problems. *IMA J. Numer. Anal.*, *in press*, 2019. (Cité en page 46.)

- [CIE21] M. De Courcy-Ireland and S. Eswarathasan. Effective bounds for monochromatic connectivity measures in two dimensions. *Nonlinearity*, 34(10) :7144, 2021. (Cit  en page 29.)
- [CL01] O. Christensen and Alexander M Lindner. Lower bounds for finite wavelet and Gabor systems. *Approximation Theory and Its Applications*, 17(1) :18–29, 2001. (Cit  en page 54.)
- [DGM86] I. Daubechies, A. Grossman, and Y. Meyer. Painless nonorthogonal expansions. *J. Math. Phys.*, 27(5) :1271–1283, 1986. (Cit  en page 50.)
- [DJ18] S. Dyatlov and L. Jin. Semiclassical measures on hyperbolic surfaces have full support. *Acta Mathematica*, 220(2) :297–339, 2018. (Cit  en page 33.)
- [DJJ91] I. Daubechies, S. Jaffard, and J.-L. Journ . A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 22(2) :554–573, 1991. (Cit  en page 54.)
- [DJN22] S. Dyatlov, L. Jin, and S. Nonnenmacher. Control of eigenfunctions on surfaces of variable curvature. *Journal of the American Mathematical Society*, 35(2) :361–465, 2022. (Cit  en page 33.)
- [DP12] E.B. Davies and A. Pushnitski. Non-Weyl resonance asymptotics for quantum graphs. *Anal. PDE*, pages 729–756, 2012. (Cit  en pages 19, 20, 23 et 24.)
- [DPL10] E.B. Davies, P.Exner, and J. Lipovsk . Non-Weyl asymptotics for quantum graphs with general coupling conditions. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43(47) :474013, 2010. (Cit  en page 19.)
- [Dro17] A. Drouot. *Stability of resonances under singular perturbations*. University of California, Berkeley, 2017. (Cit  en page 20.)
- [DZ19a] S. Dyatlov and M. Zworski. *Mathematical theory of scattering resonances*. American Mathematical Soc., 2019. (Cit  en page 19.)
- [DZ19b] S. Dyatlov and M. Zworski. *Mathematical theory of scattering resonances*, volume 200. American Mathematical Soc., 2019. (Cit  en pages 48 et 49.)
- [Ebe01] P. Eberlein. Geodesic flows in manifolds of nonpositive curvature. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 69, pages 525–572. Providence, RI ; American Mathematical Society ; 1998, 2001. (Cit  en page 34.)
- [EL11] P. Exner and J. Lipovsk . Non-Weyl resonance asymptotics for quantum graphs in a magnetic field. *Physics Letters A*, 375(4) :805–807, 2011. (Cit  en page 19.)
- [ER03] B. Engquist and O. Runborg. Computational high frequency wave propagation. *Acta Numerica*, 2003 :181–266, 2003. (Cit  en page 47.)
- [FHF01] C. Farhat, I. Harari, and L. P. Franca. The discontinuous enrichment method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190(48) :6455–6479, 2001. (Cit  en page 47.)

- [Fro97] R. Froese. Asymptotic distribution of resonances in one dimension. *Journal of differential equations*, 137(2) :251–272, 1997. (Cité en page 19.)
- [Gab46] D. Gabor. Theory of communication. part 1 : The analysis of information. *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III : Radio and Communication Engineering*, 93(26) :429–441, 1946. (Cité en page 50.)
- [GR23] A. García-Ruiz. A relation between two different formulations of Berry’s conjecture. *arXiv preprint arXiv :2305.14906*, 2023. (Cité en pages 31 et 32.)
- [Grö01] K. Gröchenig. *Foundations of time-frequency analysis*. Springer Science & Business Media, 2001. (Cité en page 54.)
- [Grö15] K. Gröchenig. Linear independence of time-frequency shifts? *Monatshefte für Mathematik*, 177(1) :67–77, 2015. (Cité en page 54.)
- [GS20] I. Graham and S. Sauter. Stability and finite element error analysis for the Helmholtz equation with variable coefficients. *Math. Comp.*, 89(321) :105–138, 2020. (Cité en page 46.)
- [GSS13] S. Gnutzmann, H. Schanz, and U. Smilansky. Topological resonances in scattering on networks (graphs). *Physical review letters*, 110(9) :094101, 2013. (Cité en page 25.)
- [GSW19] J. Galkowski, E.A. Spence, and J. Wunsch. Optimal constants in non-trapping resolvent estimates and applications in numerical analysis. *Pure and Applied Analysis*, 2(1) :157–202, 2019. (Cité en page 48.)
- [GW18] D. Gayet and J.-Y. Welschinger. Betti numbers of random nodal sets of elliptic pseudo-differential operators. *Asian Journal of Mathematics*, 21(5) :811–840, 2018. (Cité en page 29.)
- [HR92] D. A. Hejhal and B.N. Rackner. On the topography of Maass waveforms for $PSL(2, \mathbb{Z})$. *Experimental Mathematics*, 1(4) :275–305, 1992. (Cité en page 32.)
- [Ing21] M. Ingremeau. Local weak limits of Laplace eigenfunctions. *Tunisian Journal of Mathematics*, 3(3) :481–515, 2021. (Cité en pages 31, 32 et 33.)
- [Ing22a] M. Ingremeau. Scattering resonances of large weakly open quantum graphs. *Pure Appl. Anal.*, pages 49–83, 2022. (Cité en pages 19, 20, 21, 22 et 24.)
- [Ing22b] M. Ingremeau. A trace formula for scattering resonances of unbalanced quantum graphs. *arXiv preprint arXiv :2206.12460*, 2022. (Cité en pages 21, 22 et 24.)
- [IR19] M. Ingremeau and A. Rivera. A lower bound for the Bogomolny-Schmit constant for random monochromatic plane waves. *Mathematical Research Letters*, 26(4) :1179–1186, 2019. (Cité en pages 29 et 30.)

- [IR22] M. Ingremeau and A. Rivera. How Lagrangian states evolve into random waves. *Journal de l'École polytechnique—Mathématiques*, 9 :177–212, 2022. (Cit  en pages 32, 35, 36, 37 et 41.)
- [ISW20] M. Ingremeau, M. Sabri, and B. Winn. Quantum ergodicity for large equilateral quantum graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, 101(1) :82–109, 2020. (Cit  en pages 10, 11 et 12.)
- [IV23] M. Ingremeau and M. Vogel. Emergence of Gaussian fields in noisy quantum chaotic dynamics. *arXiv preprint arXiv :2306.11617*, 2023. (Cit  en pages 35, 37, 39, 40 et 43.)
- [JNS20] D. Jakobson, F. Naud, and L. Soares. Large degree covers and sharp resonances of hyperbolic surfaces. In *Annales de l'Institut Fourier*, volume 70, pages 523–596, 2020. (Cit  en page 20.)
- [KHSG07] U. Kuhl, R. H hmann, H.-J. St ckmann, and S. Gnutzmann. Nodal domains in open microwave systems. *Physical Review E*, 75(3) :036204, 2007. (Cit  en page 29.)
- [Klo16] F. Klopp. Resonances for large one-dimensional “ergodic” systems. *Analysis & PDE*, 9(2) :259–352, 2016. (Cit  en page 20.)
- [Kon12] K. Konrad. Asymptotic statistics of nodal domains of quantum chaotic billiards in the semiclassical limit. *Senior Thesis, Dartmouth College*, 2012. (Cit  en page 29.)
- [KR14] L. Kamenı and R. Schubert. Entropy of eigenfunctions on quantum graphs. *arXiv preprint arXiv :1405.5871*, 2014. (Cit  en page 10.)
- [KS97] T. Kottos and U. Smilansky. Quantum chaos on graphs. *Phys. Rev. Lett.*, pages 4794–4797, 1997. (Cit  en page 5.)
- [KS03] T. Kottos and U. Smilansky. Quantum graphs : a simple model for chaotic scattering. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 36(12) :3501, 2003. (Cit  en page 19.)
- [LB15] A. Le Bot. *Foundation of statistical energy analysis in vibroacoustics*. OUP Oxford, 2015. (Cit  en page 47.)
- [Lip16a] J. Lipovsk y. On the effective size of a non-Weyl graph. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 49(37) :375202, 2016. (Cit  en page 19.)
- [Lip16b] J. Lipovsk y. Quantum graphs and their resonance properties. *Acta Physica Slovaca*, pages 265–363, 2016. (Cit  en page 19.)
- [LSW19] D. Lafontaine, E.A. Spence, and J. Wunsch. For most frequencies, strong tapping has a weak effect in frequency-domain scattering. preprint *arXiv:1903.12172*, 2019. (Cit  en page 49.)
- [LSW20] D. Lafontaine, E. A. Spence, and J. Wunsch. Wavenumber-explicit convergence of the *hp*-fem for the full-space heterogeneous helmholtz equation with smooth coefficients. preprint *arXiv :2010.00585*, 2020. (Cit  en page 46.)

- [LSW21] D. Lafontaine, E. A. Spence, and J. Wunsch. Decompositions of high-frequency Helmholtz solutions via functional calculus, and application to the finite element method. *preprint arXiv :2102.13081*, 2021. (Cité en page 46.)
- [MB96] J. M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 139(1-4) :289–314, 1996. (Cité en page 47.)
- [Mel95] J.M. Melenk. *On generalized finite element methods*. PhD thesis, University of Maryland, 1995. (Cité en page 47.)
- [Mil10] D. Milićević. Large values of eigenfunctions on arithmetic hyperbolic surfaces. *Duke Math. J.*, 151(1) :365–401, 2010. (Cité en page 33.)
- [MS10] J.M. Melenk and S. Sauter. Convergence analysis for finite element discretizations of the Helmholtz equation with Dirichlet-to-Neumann boundary conditions. *Math. Comp.*, 79(272) :1871–1914, 2010. (Cité en page 46.)
- [MS11] J.M. Melenk and S. Sauter. Wavenumber explicit convergence analysis for Galerkin discretizations of the Helmholtz equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(3) :1210–1243, 2011. (Cité en page 46.)
- [MW99] P. Monk and D.-Q. Wang. A least-squares method for the Helmholtz equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 175(1-2) :121–136, 1999. (Cité en page 47.)
- [Nas11] M. Nastasescu. The number of ovals of a real plane curve. *Senior Thesis, Princeton*, 2011. (Cité en pages 29 et 30.)
- [Non11] S. Nonnenmacher. Spectral problems in open quantum chaos. *Nonlinearity*, 24(12) :R123, 2011. (Cité en pages 20 et 48.)
- [Non13] S. Nonnenmacher. Anatomy of quantum chaotic eigenstates. In *Chaos : Poincaré Seminar 2010*, pages 193–238. Springer, 2013. (Cité en page 32.)
- [NS09] F. Nazarov and M. Sodin. On the number of nodal domains of random spherical harmonics. *American Journal of Mathematics*, pages 1337–1357, 2009. (Cité en pages 29 et 30.)
- [NS15] F. Nazarov and M. Sodin. Asymptotic laws for the spatial distribution and the number of connected components of zero sets of Gaussian random functions. *arXiv preprint arXiv :1507.02017*, 2015. (Cité en pages 28, 29 et 33.)
- [NSZ11a] S. Nonnenmacher, J. Sjöstrand, and M. Zworski. Fractal Weyl law for open quantum chaotic maps. 2011. ArXiv 1105.3128. (Cité en page 20.)
- [NSZ11b] S. Nonnenmacher, J. Sjöstrand, and M. Zworski. From open quantum systems to open quantum maps. *Commun. Math. Phys.*, 304 :1–48, 2011. (Cité en page 20.)

- [NZ09] S. Nonnenmacher and M. Zworski. Quantum decay rates in chaotic scattering. *Acta mathematica*, 203(2) :149–233, 2009. (Cité en page 48.)
- [PS20] A. Pohl and L. Soares. Density of resonances for covers of Schottky surfaces. *Journal of Spectral Theory*, 10(3) :1053–1101, 2020. (Cité en page 20.)
- [RC12] D. Robert and M. Combescure. *Coherent states and applications in mathematical physics*. Springer, 2012. (Cité en page 50.)
- [Reg58] T. Regge. Analytic properties of the scattering matrix. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 8 :671–679, 1958. (Cité en page 19.)
- [RS94] Z. Rudnick and P. Sarnak. The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 161(1) :195–213, 1994. (Cité en pages 32 et 33.)
- [Sar95] P. Sarnak. Arithmetic quantum chaos. the Schur lectures (1992)(tel aviv), 183–236. In *Israel Math. Conf. Proc.*, volume 8, 1995. (Cité en page 33.)
- [Sch05] R. Schubert. Semiclassical behaviour of expectation values in time evolved Lagrangian states for large times. *Communications in mathematical physics*, 256 :239–254, 2005. (Cité en pages 34 et 41.)
- [Shn74] A.I. Shnirelman. Ergodic properties of eigenfunctions. *Usp. Mat. Nauk.*, 29 :181–182, 1974. (Cité en page 11.)
- [Sim00] B. Simon. Resonances in one dimension and Fredholm determinants. *Journal of Functional Analysis*, 178(2) :396–420, 2000. (Cité en page 19.)
- [Sjö96] J. Sjöstrand. A trace formula and review of some estimates for resonances, microlocal analysis and spectral theory. *Microlocal analysis and spectral theory*, pages 377–437, 1996. (Cité en page 24.)
- [Sjö00] J. Sjöstrand. Asymptotic distribution of eigenfrequencies for damped wave equations. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 36(5) :573–611, 2000. (Cité en page 24.)
- [Soa21] L. Soares. Expansion and uniform resonance free regions for convex cocompact hyperbolic surfaces. *arXiv preprint arXiv :2101.05757*, 2021. (Cité en page 20.)
- [SS10] S.A. Sauter and C. Schwab. *Boundary element methods*. Springer, 2010. (Cité en page 47.)
- [Sto98] M. Stojek. Least-squares Trefftz-type elements for the Helmholtz equation. *International journal for numerical methods in engineering*, 41(5) :831–849, 1998. (Cité en page 47.)
- [Vac22] L. Vacossin. Resolvent estimates in strips for obstacle scattering in 2d and local energy decay for the wave equation. *arXiv preprint arXiv :2211.17003*, 2022. (Cité en page 48.)

- [Zel87] S. Zelditch. Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces. *Duke mathematical journal*, 55(4) :919–941, 1987. (Cité en page 11.)
- [Zel10] S. Zelditch. Recent developments in mathematical quantum chaos. *Current developments in mathematics, 2009*, 2009 :115–205, 2010. (Cité en page 32.)
- [ZWN⁺21] S. Zettel, R. Winter, M. Norambuena, M. Böswald, M. Richter, and G. Tanner. Finite element method and dynamical energy analysis in vibro-acoustics—a comparative study. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, volume 263, pages 1712–1722. Institute of Noise Control Engineering, 2021. (Cité en page 47.)
- [Zwo87] M. Zworski. Distribution of poles for scattering on the real line. *J. Funct. Anal.*, pages 277–296, 1987. (Cité en page 19.)
- [Zwo89] M. Zworski. Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles. *Duke Math. J.*, pages 311–323, 1989. (Cité en page 19.)
- [Zwo17] M. Zworski. Mathematical study of scattering resonances. *Bulletin of Mathematical Sciences*, 7(1) :1–85, 2017. (Cité en pages 20, 25 et 48.)

