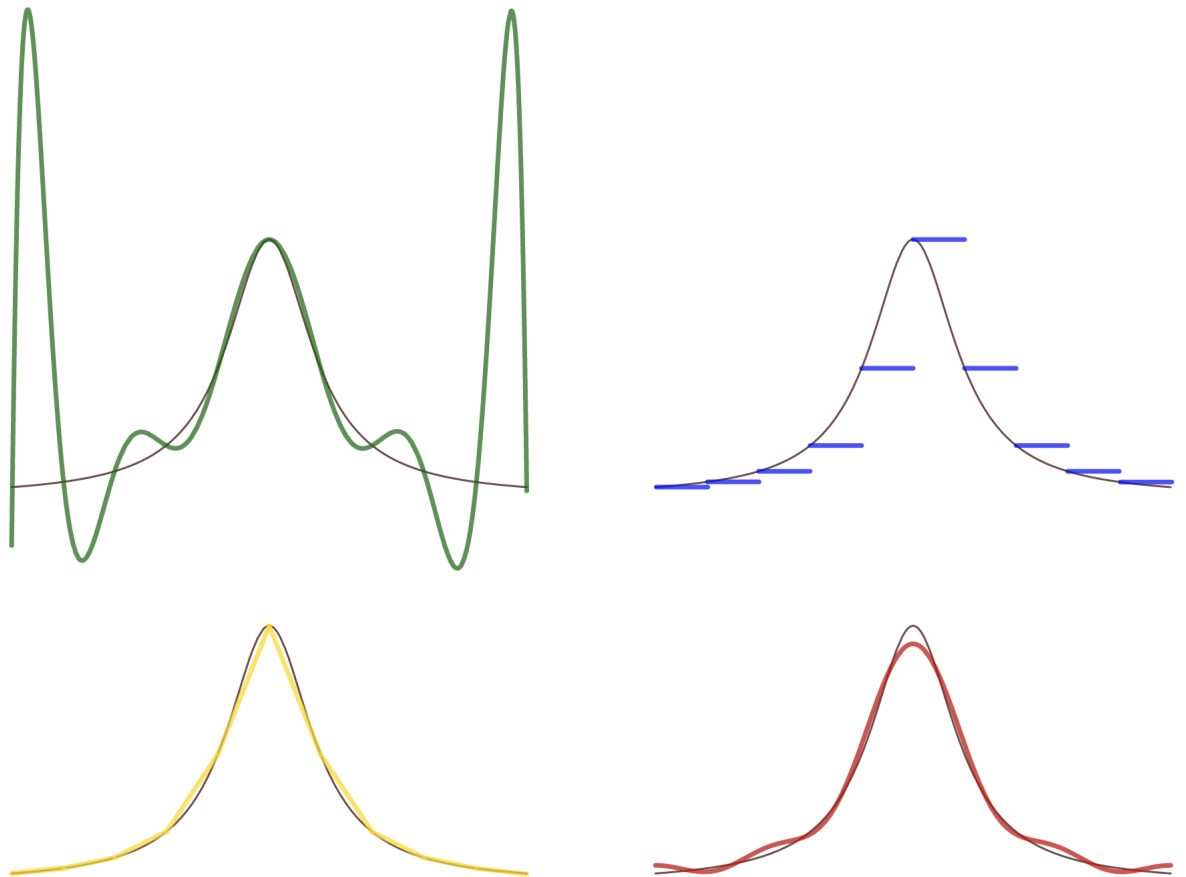


# SUITES DE FONCTIONS, CALCUL INTÉGRAL ET SÉRIES DE FOURIER

Maxime Ingremeau



# Introduction

*L'objet réel appartenant au monde - et, à plus forte raison, le monde lui-même, - est une idée infinie, se rapportant à des infinités d'expériences concordantes*

Edmund Husserl  
(Méditations cartésiennes, §28)

Qu'est-ce qu'une fonction ?

Il n'est pas si simple de répondre à cette question ! Si la notion de fonction est omniprésente en mathématique et dans les différentes sciences, il faut bien reconnaître que les fonctions peuvent nous être données de manières très différentes. Ainsi, une fonction peut être vue comme :

- Une formule, permettant de passer d'un nombre à un autre. par exemple,  $x \mapsto x^3 + 2x$ .
- Une courbe, correspondant au graphe de la fonction.
- Une loi de la nature, pouvant être testée au moyen d'une expérience reproductible. Par exemple,  $P \mapsto T(P)$ , la température d'ébullition de l'eau à la pression  $P$ .
- La simple traduction du fait qu'une quantité dépend d'une autre. Par exemple, si on définit l'instant  $t = 0$  comme étant le 31 décembre 2019 à minuit, on définit  $f(t)$  comme le nombre d'êtres humains nés en Charente au plus  $t$  secondes après l'instant  $t = 0$ .
- La solution d'un problème mathématique abstrait. Par exemple « la primitive de  $x^4 e^{-x^2}$  s'annulant en zéro » ou « la solution de l'équation différentielle  $y' = xy^2$  telle que  $y(0) = 2$  ».

Bien entendu, il arrive souvent qu'une fonction puisse être appréhendée de nombreuses manières différentes. Ainsi, la distance parcourue au bout d'un temps  $t$  par un objet lâché avec une position et une vitesse nulle peut être mesurée expérimentalement, et on peut tracer un graphique à l'aide des résultats obtenus; mais on peut aussi obtenir cette distance en résolvant l'équation différentielle<sup>1</sup>  $y''(t) = 10$ , et obtenir la formule explicite  $y(t) = 5t^2$ .

Toutefois, il arrive souvent que les fonctions ne soient pas données par des formules explicites. Par exemple :

- Les cours de la bourse sont souvent trop irréguliers pour pouvoir être décrits par une expression simple.
- Les solutions des équations de Newton décrivant le mouvement de plusieurs corps célestes en interaction ne peuvent pas être résolues de manière explicite.
- Quand je mesure les résultats d'une expérience physique, je n'obtiens qu'un nombre fini de résultats; je peux ensuite relier ces points par des segments, pour obtenir une fonction affine par morceaux.

En présence de fonctions compliquées, il est donc primordial de pouvoir les approcher par des fonctions plus simples.

**L'objectif principal de ce cours est donc de comprendre comment des fonctions compliquées peuvent être approchées par des fonctions plus simple.**

Qu'est ce qu'une fonction simple? On peut penser, par exemple à une fonction constante par morceaux ou affine par morceaux, à un polynôme, à une somme de fonctions sinus et de cosinus...

Qu'est ce qu'approcher une fonction? C'est une question plus délicate. Nous verrons qu'il y a plusieurs notions d'approximation d'une fonction : ponctuelle, uniforme, en moyenne ou en moyenne quadratique... Pour chaque problème, il y a une notion d'approximation qui est la mieux adaptée!

## Notations

Dans ces notes de cours,  $\mathbb{N}$  désignera l'ensemble des nombres entiers supérieurs ou égaux à zéro, et  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des entiers strictement positifs.

Si  $f$  est une fonction de plusieurs variables, la dérivée de  $f$  par rapport à la variable  $x$  sera notée  $\frac{df}{dx}$ , ou encore  $\partial_x f$ .

On dit qu'une fonction est  $C^k$  si elle est dérivable  $k$  fois, et que sa dérivée  $k^{\text{ème}}$  est continue (ou ses dérivées  $k^{\text{ème}}$ , si elle dépend de plusieurs variables).

L'ensemble  $[0, +\infty]$  désignera l'ensemble  $[0, +\infty[$ , auquel on ajoute l'élément  $\{+\infty\}$ . La somme d'un entier positif avec  $+\infty$  vaudra toujours  $+\infty$ , et la relation  $\ll \gg$  s'étend à  $[0, +\infty]$  en posant que  $+\infty > x$  pour tout  $x$  fini.

1. Ceci correspond à la loi de Newton dans le champ gravitationnel terrestre. Les distances sont mesurées en mètre, et les temps en seconde.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Polynômes</b>	<b>5</b>
1.1	Définition d'un polynôme . . . . .	5
1.2	Racines de polynômes . . . . .	6
1.3	Interpolation . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Calculs d'intégrales en dimension 1</b>	<b>10</b>
2.1	Quelques rappels sur les dérivées et les primitives . . . . .	10
2.2	Techniques de calcul d'intégrales . . . . .	11
2.2.1	L'intégration par parties . . . . .	11
2.2.2	Le changement de variables . . . . .	11
2.3	Calculs numériques d'intégrales . . . . .	13
2.3.1	Plusieurs méthodes de calculs numériques d'intégrales . . . . .	13
2.3.2	Estimation de l'erreur commise lors de l'approximation numérique . . . . .	15
2.4	Une généralisation de la notion d'intégrale . . . . .	19
2.4.1	Intégrales de fonctions positives . . . . .	19
2.4.2	Intégrales de fonctions de signe quelconque . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Intégrales multiples</b>	<b>23</b>
3.1	Intégrales multiples de fonctions positives . . . . .	23
3.1.1	Le théorème de Fubini-Tonelli . . . . .	24
3.1.2	Changements de variables . . . . .	25
3.2	Intégrales de fonctions de signe quelconque . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Espaces <math>L^p</math></b>	<b>29</b>
4.1	Fonctions $L^p$ . . . . .	29
4.2	L'espace $L^p$ comme espace vectoriel normé . . . . .	31
4.3	L'espace $L^2$ . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Suites de fonctions</b>	<b>33</b>
5.1	Convergence simple et convergence uniforme . . . . .	33
5.2	Propriétés de la convergence uniforme . . . . .	34
5.2.1	Interversion de limite et d'intégrale, première partie . . . . .	34
5.2.2	Propriétés de la fonction limite . . . . .	36
5.3	Interversion de limite et d'intégrale, le retour . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Intégrales à paramètres et transformée de Fourier</b>	<b>40</b>
6.1	Intégrales à paramètres . . . . .	40
6.2	Transformée de Fourier . . . . .	42
6.2.1	Définition et exemples . . . . .	42
6.2.2	Propriétés élémentaires . . . . .	43
6.2.3	Transformée de Fourier et dérivation . . . . .	43
6.2.4	Transformée de Fourier inverse et formule de Plancherel . . . . .	45

<b>7</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>47</b>
7.1	Les coefficients de Fourier et leur propriétés . . . . .	47
7.1.1	Coefficients de Fourier réels . . . . .	48
7.1.2	Propriétés de coefficients de Fourier . . . . .	49
7.2	Convergence des séries de Fourier . . . . .	49
7.2.1	Convergence ponctuelle . . . . .	49
7.2.2	Convergence $L^2$ . . . . .	52
7.3	Coefficients de Fourier de fonctions qui ne sont pas $2\pi$ -périodiques . . . . .	53

# Chapitre I

## Polynômes

Dans ce chapitre, nous étudierons les fonctions polynomiales sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Par bien des aspects, ce sont les fonctions les plus faciles à étudier : il est simple de calculer leurs dérivées et leurs primitives, on sait combien de zéros elles possèdent, il est simple de les factoriser...

On s'intéressera ensuite à l'interpolation polynomiale, c'est à dire à l'existence de polynômes prenant des valeurs prescrites en des points donnés. On cherchera alors à comprendre s'il est possible d'approcher efficacement une fonction par des polynômes interpolant entre ses valeurs en différents points.

### I.1 Définition d'un polynôme

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1.1.** • Une fonction polynomiale (ou polynôme) est une fonction de la forme

$$P = \begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \end{cases}$$

où  $n \in \mathbb{N}$ , et  $a_0, \dots, a_n$  sont des coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Le polynôme nul est le polynôme tel que tous les  $a_k$  sont nuls (c'est-à-dire que  $P$  est la fonction nulle).

- L'ensemble des polynômes sur  $\mathbb{K}$  est noté  $\mathbb{K}[X]$ . Si  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble des polynômes tels que  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  est noté  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ , différent du polynôme nul. On définit le degré de  $P$ , noté  $\deg(P)$ , comme le plus grand entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a_n \neq 0$ . Autrement dit, le degré de  $P$  est le plus petit  $n$  tel que  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ . Si  $P$  est le polynôme nul, son degré est (par convention) égal à  $-\infty$ .

Traditionnellement, le polynôme  $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  est noté  $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ .

**Remarque 1.1.** L'écriture d'une fonction polynomiale sous la forme  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  est unique : si  $\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^m b_k x^k$  pour tout  $x \in \mathbb{K}$ , alors  $m = n$ , et  $b_k = a_k$  pour tout  $k$ .

**Remarque 1.2.** Un nombre réel peut toujours être vu comme un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle. Ainsi, un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  peut toujours être vu comme un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  : si  $a_0, \dots, a_n$  sont des nombres réels, on peut bien

définir la fonction  $\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k \end{cases}$ .

**Lemme 1.1.** Soient  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a

$$\begin{aligned} \deg(P + Q) &\leq \max(\deg(P), \deg(Q)), \text{ avec égalité lorsque } \deg P \neq \deg Q \\ \deg(\lambda P) &= \deg(P) \text{ si } \lambda \neq 0 \\ \deg(PQ) &= \deg(P) + \deg(Q), \end{aligned}$$

avec la convention que  $n \times (-\infty) = -\infty$ .

En particulier, on en déduit que  $\mathbb{K}_n[X]$  est un  $\mathbb{K}$  espace-vectoriel.

Démonstration. En TD. □

**Pour la culture.** Plutôt que de voir un polynôme comme une fonction, on peut le voir comme une suite finie de coefficients. On peut définir la somme ou le produit de polynômes en ne passant que par les coefficients, sans parler de fonctions.

Ce point de vue est principalement utilisé en algèbre, où les coefficients  $a_k$  et la variable  $x$  vivent dans un ensemble qui n'est pas forcément  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Dans ce cas, on ne peut pas toujours identifier une suite de coefficients à une fonction : on peut avoir  $\sum_{k=0}^n a_k x^k = 0$  pour tout  $x$  dans l'ensemble considéré, alors que les coefficients  $a_k$  ne sont pas nuls... Nous ne rencontrerons jamais de telles subtilités dans ce cours!

## 1.2 Racines de polynômes

**Définition 1.2.** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ , et soit  $x_0 \in \mathbb{K}$ . On dit que  $x_0$  est une racine de  $P$  si  $P(x_0) = 0$ .

**Exemple 1.1.** — Considérons le polynôme  $P(X) = 3X^2 - 6X + 3$ . On a  $P(1) = 3 - 6 + 3 = 0$ , donc 1 est une racine de  $P$ .

— Considérons le polynôme  $P(X) = X^2 + 1$ . Si on le voit comme un polynôme dans  $\mathbb{R}[X]$ , alors il n'a pas de racines : pour tout nombre réel  $x$ , la quantité  $x^2 + 1$  est strictement positive. Mais, si on voit  $X^2 + 1$  comme un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$ , alors il a deux racines,  $i$  et  $-i$ .

**Théorème 1.1.** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ , et soit  $x_0 \in \mathbb{K}$ . Alors  $x_0$  est une racine de  $P$  si et seulement si il existe  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que

$$P = (X - x_0)Q.$$

*Démonstration.* Si  $P = (X - x_0)Q$ , alors  $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ , donc  $P(x_0) = 0 \times Q(x_0) = 0$ . Réciproquement, supposons  $P(x_0) = 0$ . Si le degré de  $P$  vaut 1, alors le résultat est évident. Sinon, on a

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X) - P(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k X^k - \sum_{k=0}^n a_k x_0^k \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (X^k - x_0^k) \quad \text{les termes pour } k=0 \text{ se simplifiant} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (X - x_0) (X^{k-1} + x_0 X^{k-2} + \dots + x_0^{k-1}), \end{aligned}$$

par la magie des identités remarquables. On obtient donc le résultat en posant

$$Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k (X^{k-1} + x_0 X^{k-2} + \dots + x_0^{k-1}).$$

□

**Remarque 1.3.** Si  $P = (X - x_0)Q$ , alors  $\deg(Q) = \deg(P) - 1$ .

**Définition 1.3.** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ , et soit  $x_0 \in \mathbb{K}$  une racine de  $P$ . Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $x_0$  est une racine de  $P$  d'ordre  $m$  (ou de multiplicité  $m$ ) s'il existe un polynôme  $Q$  tel que  $Q(x_0) \neq 0$ , et  $P = (X - x_0)^m Q$ .

**Corollaire 1.1.** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ , et soient  $x_1, \dots, x_k$  des racines de  $P$ , de multiplicités respectives  $m_1, \dots, m_k$ . Il existe alors un polynôme  $Q$  tel que

$$P = (X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_k)^{m_k} Q. \quad (1.1)$$

En particulier, si  $P$  est de degré  $n \in \mathbb{N}$ , alors la somme des multiplicités des racines de  $P$  est au plus égale à  $n$ .

**Remarque 1.4.** Un polynôme de degré  $n$  a donc au plus  $n$  racines.

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le Théorème 1.1 plusieurs fois pour obtenir la formule (1.1). Ensuite, on remarque que  $\deg(Q) = \deg(P) - m_1 - \dots - m_k$ . Mais, comme  $P$  n'est pas le polynôme nul,  $Q$  n'est pas non plus le polynôme nul, donc son degré est un entier positif. On a donc  $\deg(P) \geq m_1 + \dots + m_k$ , et donc la somme des multiplicités des racines de  $P$  est inférieure ou égale au degré de  $P$ .  $\square$

Comme son nom l'indique, le théorème suivant est fondamental en algèbre. Pourtant, il n'en existe aucune preuve purement algébrique : toutes les preuves connues font appel à des techniques d'analyse !

**Théorème 1.2** (Théorème fondamental de l'algèbre). Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. Alors  $P$  possède au moins une racine.

**Remarque 1.5.** Attention, ce théorème est faux sur  $\mathbb{R}$  ! Par exemple, le polynôme  $X^2 + 2$  n'a pas de racines réelles. En revanche, quand on le voit comme un polynôme complexe, il admet bien des racines :  $i\sqrt{2}$  et  $-i\sqrt{2}$ .

Par contre, sur  $\mathbb{R}$ , un polynôme de degré impair possède toujours une racine : il tend vers  $\pm\infty$  en  $+\infty$ , et vers  $\mp\infty$  en  $-\infty$ , donc, par continuité, il doit s'annuler quelque part.

On en déduit qu'un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  peut toujours se factoriser de la manière suivante.

**Corollaire 1.2.** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ , de la forme  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . Alors  $P$  peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a_n \prod_{i=1}^n (X - x_i).$$

Ici, l'ensemble  $\{x_1, \dots, x_n\}$  est l'ensemble des racines de  $P$ , répétées avec multiplicité.

*Démonstration.* Soit  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ , de la forme  $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ . Par le théorème fondamental de l'algèbre, il existe  $x_1 \in \mathbb{C}$  qui est une racine de  $P$ . Ainsi, on peut écrire  $P = (X - x_1)Q_1$ .

On applique alors le même argument à  $Q$ , ce qui nous permet d'écrire  $Q = (X - x_2)Q_2 \dots$ . On peut répéter cet argument  $n$  fois, jusqu'à ce qu'on arrive à un polynôme qui est une constante  $\alpha$ . On a donc

$$P = \alpha \prod_{i=1}^n (X - x_i).$$

En développant l'expression, on voit que  $\alpha = a_n$ .  $\square$

**Remarque 1.6.** Le Corollaire 1.1 nous dit qu'il est toujours possible d'écrire un polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  comme un produit de polynômes de degré 1. Ceci n'est plus possible pour un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ , car certains polynômes n'ont pas de racines ( $X^4 + 1$ , par exemple). Cependant, on peut montrer qu'un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  peut toujours être écrit comme un produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2.

### 1.3 Interpolation

**Théorème 1.3.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soient  $a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $\mathbb{K}$  deux à deux distincts, et soient  $b_1, \dots, b_n$  des éléments de  $\mathbb{K}$  (pas nécessairement distincts).

Alors il existe un unique  $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$  tel que, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on a  $P(a_i) = b_i$ .

*Démonstration. Existence :* Pour chaque  $1 \leq i \leq n$ , on définit un polynôme  $L_i$  par<sup>1</sup>

$$L_i := \frac{(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_{i-1})(X - a_{i+1}) \cdots (X - a_n)}{(a_i - a_1)(a_i - a_2) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_n)}.$$

Le polynôme  $L_i$  est alors de degré  $n - 1$ , et on a  $L_i(a_j) = 0$  si  $j \neq i$ , tandis que  $L_i(a_i) = 1$ .

On pose alors  $P = \sum_{i=1}^n b_i L_i$ , et ce polynôme vérifie toutes les propriétés attendues.

**Unicité :** Supposons qu'il existe deux polynômes  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$  tels que, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on ait  $P(a_i) = Q(a_i) = b_i$ . Le polynôme  $P - Q$  est alors de degré au plus  $n - 1$ , mais les  $a_i$  sont tous des racines de  $P - Q$ .

Par le Corollaire 1.1, un polynôme de degré  $n - 1$  ayant  $n$  racines est nécessairement le polynôme nul, donc on a  $P = Q$ . □

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , et soient  $x_1 < \dots < x_n$  des points de  $[a, b]$ . Grâce au Théorème 1.3, on sait qu'il existe un unique polynôme  $P$  tel que  $P(x_i) = f(x_i)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Il est naturel de se demander si, pour les autres  $x$  de  $[a, b]$ ,  $P(x)$  est proche de  $f(x)$ .

Dans le cas où  $f$  est une fonction  $C^n$ , une réponse partielle est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 1.1.** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^n$  sur  $[a, b]$ . Soient  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ , et soit  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  le polynôme tel que  $P(x_i) = f(x_i)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Alors on a, pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{n!} \sup_{y \in [a, b]} |f^{(n)}(y)| \prod_{i=1}^n |x - x_i| \quad (1.2)$$

*Démonstration.* (Hors programme) Soit  $x \in [a, b]$ . Si  $x = x_i$  pour un  $i \in \{1, \dots, n\}$ , le résultat est évident, car  $f(x) - P(x) = 0$ . Supposons donc  $x$  différent de tous les  $x_i$ . On pose  $g(y) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ , et on considère la fonction

$$h(y) = f(y) - P(y) - \frac{g(y)}{g(x)}(f(x) - P(x)).$$

La fonction  $h$  est alors nulle en  $x_1, \dots, x_n$ , mais aussi en  $y = x$ . Elle admet donc au moins  $n + 1$  zéros.

En appliquant le théorème de Rolle<sup>2</sup> entre chacun des zéros de  $h$ , on en déduit que  $h'$  a au moins  $n$  zéros. En répétant l'argument  $n$  fois, on en déduit que  $h^{(n)}$  s'annule en un point  $y_0$ . Mais  $P$  est de degré  $n - 1$ , donc  $P^{(n)} = 0$ . D'autre part, on a  $g^{(n)} = n!$ . Ainsi, on a

$$0 = h^{(n)}(y_0) = f^{(n)}(y_0) - n! \frac{f(x) - P(x)}{g(x)}.$$

On a donc

$$|f(x) - P(x)| = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n |x - x_i| \times |f^{(n)}(y_0)|,$$

d'où l'on déduit le résultat. □

La Proposition 1.1 nous donne une borne sur la différence entre  $f$  et un polynôme  $P$  qui interpole entre les valeurs prises par  $x$  en  $n$  points  $x_1, \dots, x_n$ . Néanmoins, la borne dans l'équation (1.2) tend à devenir de plus en plus grande quand  $n$  devient grand!

Ainsi, quand on interpole entre de plus en plus de valeurs prises par  $f$ , il n'est pas certain que le polynôme interpolateur approche  $f$  de mieux en mieux. Ce phénomène, appelé *phénomène de Runge* est illustré sur la figure 1.1 pour la fonction  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$  sur  $[-1, 1]$ . Quand on augmente le nombre de points d'interpolation, les polynômes approchent  $f$  de mieux en mieux loin de  $-1$  et de  $1$ , mais ils ont tendance à s'en écarter de plus en plus près des extrémités de l'intervalle!

1. Un tel polynôme s'appelle un *polynôme d'interpolation de Lagrange*.

2. On rappelle que le théorème de Rolle affirme que, si une fonction  $f$  est  $C^1$  sur  $[\alpha, \beta]$  avec  $f(\alpha) = f(\beta)$ , alors il existe un  $x \in ]\alpha, \beta[$  tel que  $f'(x) = 0$ .



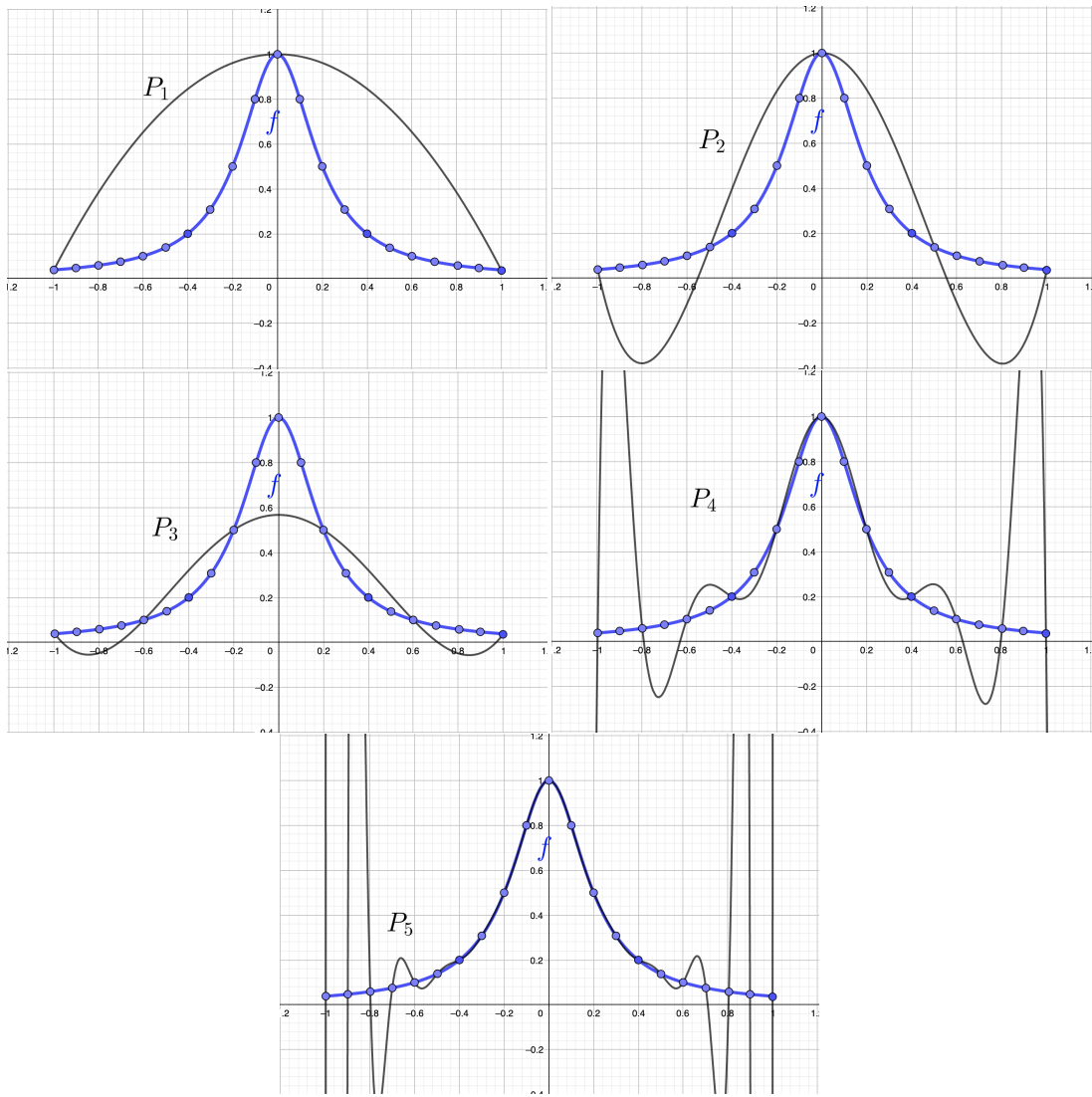


FIGURE 1.1 – Phénomène de Runge pour  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$  sur  $[-1, 1]$

## Chapitre 2

# Calculs d'intégrales en dimension 1

Dans ce chapitre, nous commencerons par revoir les techniques usuelles pour calculer des intégrales en dimension 1 : l'intégration par parties, et les changements de variable. Nous verrons ensuite plusieurs méthodes de approcher numériquement (c'est-à-dire à l'aide d'un ordinateur) la valeur d'intégrales ; ceci est particulièrement utile pour calculer des intégrales faisant intervenir des fonctions dont la primitive ne peut pas être exprimée explicitement.

Enfin, nous verrons comment l'intégrale d'une fonction continue sur un segment peut être généralisée : nous apprendrons à intégrer des fonctions continues sur des intervalles quelconques, et même à intégrer des fonctions discontinues !

### 2.1 Quelques rappels sur les dérivées et les primitives

On rappelle que, si  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle, et si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction dérivable, on note sa dérivée  $f'$  ou  $\frac{df}{dx}$ . Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions dérivables de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , et si  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)' &= \lambda f' + \mu g' \\ (fg)' &= f'g + fg'\end{aligned}\tag{2.1}$$

Enfin, si  $J \subset \mathbb{R}$  est un intervalle, et si  $\varphi : J \rightarrow I$ , on définit la fonction  $f \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  par  $(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x))$ . Si  $\varphi$  est dérivable, alors la fonction  $f \circ \varphi$  est dérivable, et on a

$$(f \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x)f'(\varphi(x)).\tag{2.2}$$

Si  $[a, b]$  est un segment inclus dans  $I$ , l'intégrale de  $f$  de  $a$  à  $b$  est notée  $\int_a^b f(x) dx$ , ou encore  $\int_{[a,b]} f(x) dx$ . Si  $b < a$ , on note souvent  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ .

Une *primitive* de  $f$  est une fonction  $F$  telle que  $F'(x) = f(x)$ . Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux primitives de  $f$ , on a  $F_1' - F_2' =$  constante. Si  $a \in I$ , la fonction  $\int_a^x f(x) dx$  est une primitive de  $f$ . Réciproquement, si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

Les primitives suivantes sont à connaître impérativement, pour comprendre le cours, faire les exercices des TD, et pour les examens.

Fonction $f$	Fonction primitive $F$	Intervalle
$x^\alpha, \alpha \geq 0$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}, \alpha \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$	$\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

Les primitives suivantes sont également classiques, et peuvent être utiles pour certains exercices. Si elles interviennent dans un examen, elles seront rappelées.

Fonction $f$	Fonction primitive $F$	Intervalle
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan x$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$] -1, 1[$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$] -1, 1[$

## 2.2 Techniques de calcul d'intégrales

### 2.2.1 L'intégration par parties

**Théorème 2.1.** Soient  $a < b$ , et soient  $f$  et  $g$  des fonctions différentiables sur  $[a, b]$ . On a

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx,$$

où

$$[f(x)g(x)]_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

*Démonstration.* Il suffit de se rappeler que  $\frac{d}{dx}(fg)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ . En intégrant cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} f(b)g(b) - f(a)g(a) &= \int_a^b (fg)'(x) \, dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx, \end{aligned}$$

d'où le résultat découle. □

**Exemple 2.1.** Calculons  $\int_0^2 xe^x \, dx$ .

La fonction  $x \mapsto xe^x$  ne fait pas partie des fonctions usuelles dont la primitive doit être connue. On peut néanmoins se ramener à calculer des primitives de fonctions usuelles grâce à l'intégration par parties. Posons  $f(x) = e^x$  et  $g(x) = x$ , de sorte que  $f'(x) = e^x$  et  $g'(x) = 1$ . La formule d'intégration par parties nous donne donc

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^x \, dx &= [xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x \, dx \\ &= 2e^2 - [e^x]_0^2 \\ &= e^2 + 1. \end{aligned}$$

### 2.2.2 Le changement de variables

**Théorème 2.2.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle, soit  $a < b$ , et soit  $\varphi : [a, b] \rightarrow I$  une fonction  $C^1$  qui est strictement croissante ou strictement décroissante.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On a alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$$

**Exemple 2.2.** Soit  $a < b$ , et soit  $\lambda > 0$ . On a alors (en appliquant la formule de changement de variable pour  $\varphi(t) = \lambda t$ ):

$$\int_a^b f(\lambda x) \, dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x) \, dx.$$

Dans la pratique, on veut calculer une expression de la forme  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ . Si  $y(x)$  est une fonction strictement monotone, on peut faire un changement de variable en  $y$ . On écrit  $dy = y'(x)dx$ , et on remplace donc  $dx$  par  $\frac{1}{y'(x)}dy$ . Il faut alors faire disparaître de l'intégrale tous les  $x$  (y compris celui qui apparaît dans le facteur  $\frac{1}{y'(x)}$ ), en les remplaçant par une expression ne dépendant que de  $y$ .

Dans la rédaction d'un calcul, on ne veut intégrer des expressions ne dépendant que de  $x$  ou que de  $y$ , mais, au brouillon, on peut écrire des quantités qui font intervenir  $x$  et  $y$ !

Enfin, on doit dire la chose suivante : si  $x$  varie de  $\alpha$  à  $\beta$ , alors  $y(x)$  varie de ... à ... Cela nous donne les bornes de la nouvelle intégrale à calculer!

**Exemple 2.3.** Calculons  $\int_0^1 x \cos(x^2) dx$ .

On veut poser  $y(x) = x^2$ . Cette fonction est bien strictement croissante sur  $[0, 1]$ . On a  $dy = 2x dx$ . Enfin, quand  $x$  varie de 0 à 1,  $y$  varie aussi de 0 à 1. Ainsi, on a

$$\int_0^1 x \cos(x^2) dx = \int_0^1 \cos(y) \frac{dy}{2} = \left[ \frac{\sin y}{2} \right]_0^1 = \frac{\sin(1)}{2}.$$

*Démonstration.* Soit  $F$  une primitive de  $f$ . En utilisant (2.2), on remarque que

$$(F \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t)F'(\varphi(t)) = \varphi'(t)f(\varphi(t)).$$

On intègre cette égalité sur  $[a, b]$ , pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(t) dt \\ &= (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx. \end{aligned}$$

□

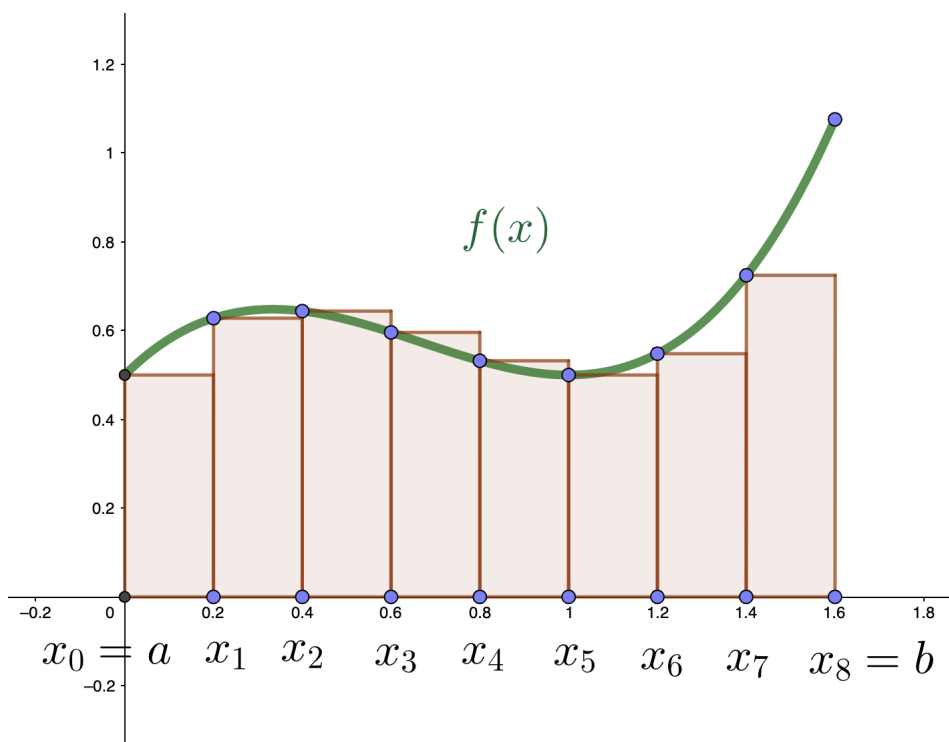


FIGURE 2.1 – L'aire calculée par la 8<sup>ième</sup> somme de Riemann à gauche

## 2.3 Calculs numériques d'intégrales

Le but de ce chapitre est de comprendre comment estimer numériquement (c'est-à-dire à l'aide d'un ordinateur ou d'une calculatrice) une quantité de la forme  $\int_a^b f(x) dx$ .

### 2.3.1 Plusieurs méthodes de calculs numériques d'intégrales

Soit  $[a, b]$  un segment, et soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour chaque  $j \in \{0, \dots, n\}$ , notons

$$x_j := a + j \frac{(b-a)}{n}.$$

Les  $x_j$  sont donc des points équirépartis entre  $a$  et  $b$ , avec  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ . La quantité suivante est alors une bonne approximation de  $\int_a^b f(x) dx$ .

On définit la  $n^{\text{ième}}$  somme de Riemann à gauche de  $f$  par

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + j \frac{b-a}{n}\right).$$

La méthode consistant à approcher  $\int_a^b f(x) dx$  s'appelle la méthode des rectangles à gauche.

Cette quantité correspond (voir Figure 2.1) à remplacer, sur chaque intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$ , la fonction  $f$  par la constante  $f(x_j)$ . On obtient alors une fonction constante par morceaux, et son intégrale est alors donnée par  $\frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)$  : il s'agit d'une somme d'aires de rectangles, dont la base est  $x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}$ , et dont la hauteur est  $f(x_j)$ .

Il existe des variantes de cette méthode : plutôt que d'approcher, sur chaque intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$ , la fonction  $f$  par la constante  $f(x_j)$ , on peut l'approcher par la constante  $f(x_{j+1})$ . On parle alors de la *méthode des rectangles à droite* (voir figure 2.2), ce qui consiste à calculer la  $n^{\text{ième}}$  somme de Riemann à droite

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j).$$

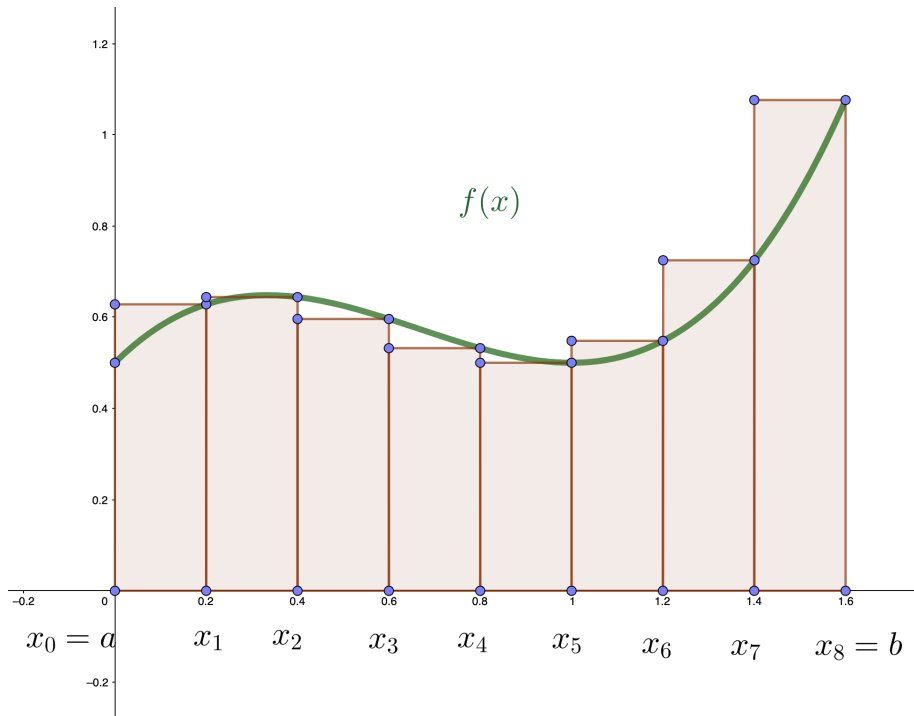


FIGURE 2.2 – L'aire calculée par la 8<sup>ième</sup> somme de Riemann à droite

En regardant les figures 2.1 et 2.2, on voit que l'on commet d'assez grosses erreurs d'approximation lorsque la fonction varie rapidement : par exemple, entre  $x_7$  et  $x_8$ , on sous-estime beaucoup la fonction avec la méthode des rectangles à gauche, et on la surestime beaucoup avec la méthode des rectangles à droite.

On commet une erreur moins importante avec la *méthode des rectangles centrés*, ou *méthode du point médiant* (voir figure 2.3, où sur chaque intervalle  $[x_j, x_{j+1}[$ , on approche la fonction  $f$  par la constante  $f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)$ ). Cela consiste donc à calculer la  $n^{\text{ième}}$  somme de Riemann centrée

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right).$$

Lorsque la fonction  $f$  est suffisamment régulière, il y a une autre méthode qui est beaucoup plus efficace : la *méthode des trapèzes* (voir figure 2.4). Plutôt que d'approcher, sur chaque intervalle  $[x_j, x_{j+1}[$ , la fonction  $f$  par une constante, on peut l'approcher par une fonction affine, passant par  $f(x_j)$  en  $x_j$  et  $f(x_{j+1})$  en  $x_{j+1}$ . Il s'agit donc de la fonction  $x \mapsto f(x_j) + x \frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j} = f(x_j) + nx \frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{b-a}$ .

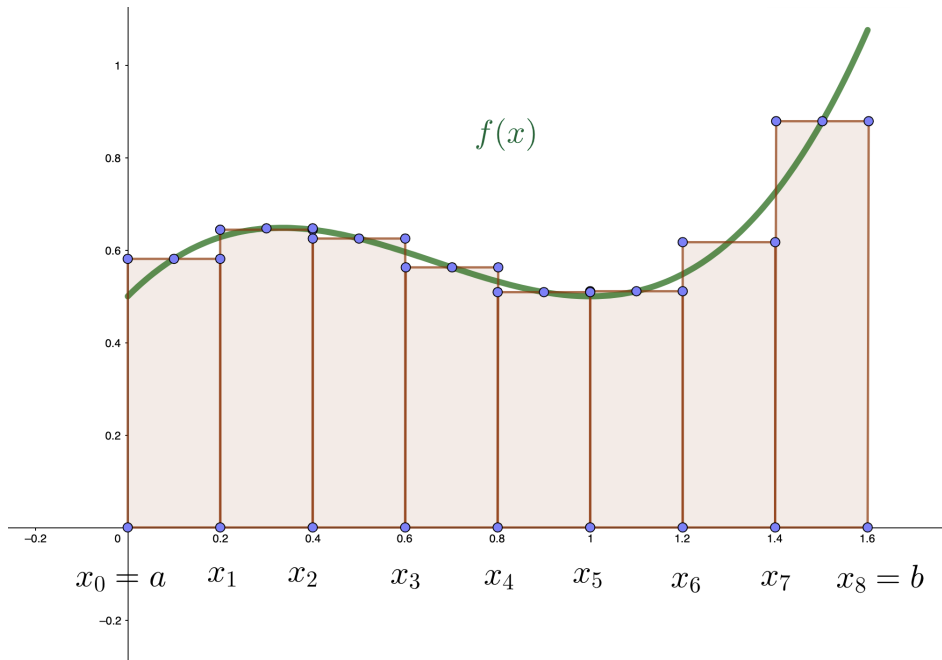


FIGURE 2.3 – L'aire calculée par la 8<sup>ième</sup> somme de Riemann centrée

On considère alors la quantité

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2}.$$

Remarquons que cette quantité est la moyenne des  $n^{\text{ièmes}}$  sommes de Riemann à gauche et à droite. On voit sur la figure 2.4 que l'erreur faite est beaucoup plus petite qu'avec les différentes méthodes des rectangles.

### 2.3.2 Estimation de l'erreur commise lors de l'approximation numérique

Nous allons maintenant donner une estimation de l'erreur commise dans la méthode des rectangles et dans la méthode des trapèzes. L'erreur commise dépend toujours de  $n$ , et tend à devenir négligeable quand  $n$  devient grand.

#### Estimation de l'erreur pour la méthode des rectangles

**Théorème 2.3.** *Supposons que  $f$  soit  $C^1$  sur  $[a, b]$ , et que, pour tout  $x \in [a, b]$ , on ait  $|f'(x)| \leq C$ . Alors on a*

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \right| \leq C \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

*Démonstration.* Par la relation de Chasles, on a  $\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \, dx$ . Ainsi, il nous faut estimer

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \right| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \, dx - \frac{b-a}{n} f(x_j) \right| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} (f(x) - f(x_j)) \, dx \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x) - f(x_j)| \, dx. \end{aligned}$$

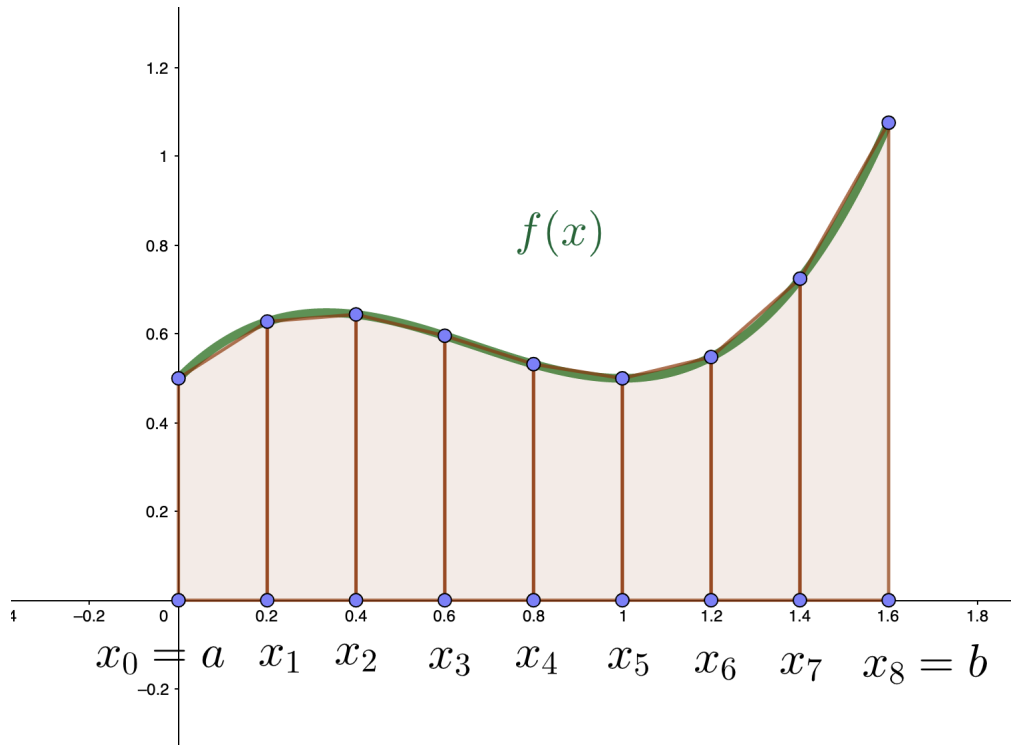


FIGURE 2.4 – L'aire calculée avec la méthode des trapèzes.

Pour passer de la première à la deuxième ligne, on a juste utilisé le fait que  $\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x_j) dx = (x_{j+1} - x_j)f(x_j) = \frac{b-a}{n} f(x_j)$ .

Ensuite, on se rappelle que la formule fondamentale de l'analyse nous donne

$$f(x) = f(x_j) + \int_{x_j}^x f'(y) dy. \quad (2.3)$$

Comme  $|f'(y)| \leq C$ , on en déduit que  $|f(x) - f(x_j)| \leq C|x - x_j|$ .

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \right| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x) - f(x_j)| dx \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} C|x - x_j| dx \\ &= C \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{x_{j+1}-x_j} y dy \text{ en posant } y = x - x_j \\ &= Cn \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2} \\ &= C \frac{(b-a)^2}{2n}. \end{aligned}$$

□



## Estimation de l'erreur pour la méthode des trapèzes

**Théorème 2.4.** Supposons que  $f$  soit  $C^2$  sur  $[a, b]$ , et que, pour tout  $x \in [a, b]$ , on ait  $|f''(x)| \leq C$ . Alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} \right| \leq C \frac{(b-a)^3}{n^2}.$$

*Démonstration.* (Hors programme) Pour chaque  $j = 0, \dots, n-1$ , notons  $g_j(x) = f(x_j) + x \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}$ . On a alors

$$\frac{b-a}{n} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} g_j(x) \, dx.$$

Par conséquent, la relation de Chasles nous donne

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} \right| &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \, dx - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} g_j(x) \, dx \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x) - g_j(x)| \, dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Remarquons que l'on a

$$\begin{aligned} f(x) - g_j(x) &= \int_{x_j}^x \left( f'(y) - \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \right) dy \\ &= \int_{x_j}^x \left( f'(y) - \frac{1}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(z) \, dz \right) dy \\ &= \frac{1}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^x \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} (f'(y) - f'(z)) \, dz \right) dy. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - g_j(x)| &\leq \frac{1}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f'(y) - f'(z)| \, dz \right) dy \\ &\leq \frac{1}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} C|y - z| \, dz \right) dy \\ &\leq \frac{C}{x_{j+1} - x_j} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{j+1} - x_j) \, dz \right) dy \text{ car } |y - z| \leq x_{j+1} - x_j \\ &\leq C(x_{j+1} - x_j)^2. \end{aligned}$$

En combinant ceci avec (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} \right| &\leq C \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{j+1} - x_j)^2 \, dx \\ &= nC(x_{j+1} - x_j)^3 \\ &= C \frac{(b-a)^3}{n^2}. \end{aligned}$$

□

**Remarque 2.1.** L'erreur qu'on obtient décroît donc plus vite avec la méthode des trapèzes qu'avec la méthode des rectangles : en  $\frac{1}{n^2}$  plutôt qu'en  $\frac{1}{n}$ .

*En faisant un peu plus attention aux constantes apparaissant dans les calculs, on aurait pu montrer qu'on a en fait*

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} \right| \leq C \frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

La méthode des rectangles consiste à approcher  $f$ , sur chaque  $[x_j, x_{j+1}[$ , par un polynôme d'ordre 0 (une constante), tandis que la méthode des trapèzes consiste à l'approcher par un polynôme de degré 1. Si la fonction  $f$  est encore plus régulière que  $C^2$ , il est possible d'obtenir de calculer son intégrale de façon encore plus efficace (avec une erreur étant une puissance de  $\frac{1}{n}$  encore plus élevée) en approchant  $f$ , sur chaque  $[x_j, x_{j+1}[$  par un polynôme de degré plus élevé.

## 2.4 Une généralisation de la notion d'intégrale

### 2.4.1 Intégrales de fonctions positives

**Fait 2.1.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle, et soit  $f : I \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction (**pas nécessairement continue**). Alors on peut toujours définir la quantité

$$\int_I f(x) dx \in [0, +\infty].$$

Si  $I$  a pour extrémités (finies ou infinies)  $a$  et  $b$ , cette quantité est aussi notée  $\int_a^b f(x) dx$ .

Cette intégrale a toutes les propriétés usuelles :

- Si  $f, g : I \rightarrow [0, +\infty]$  et si  $\lambda, \mu \geq 0$ , alors

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_I f(x) dx + \mu \int_I g(x) dx.$$

- Si  $I \cap J = \emptyset$  et si  $f : I \cup J \rightarrow [0, +\infty]$ , alors

$$\int_{I \cup J} f(x) dx = \int_I f(x) dx + \int_J f(x) dx.$$

- Si  $I \subset J$ , alors

$$\int_I f(x) dx \leq \int_J f(x) dx.$$

- Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions définies sur  $I$ , avec, pour tout  $x \in I$ ,  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , alors on a

$$\int_I f(x) dx \leq \int_I g(x) dx.$$

Si  $\int_I f(x) dx < +\infty$ , on dit que  $f$  est intégrable sur  $I$ .

Bien entendu, si  $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty[$ , alors cette définition coïncide avec la définition usuelle d'une intégrale, et on a  $\int_a^b f(x) dx < +\infty$ .

**Pour la culture.** La construction de  $\int_I f(x) dx$  pour des fonctions très irrégulières passe par la théorie de l'intégration de Lebesgue. En fait, il faut quand même une petite condition sur  $f$  : on demande qu'elle soit mesurable. Cette condition est vérifiée par toutes les fonctions que vous rencontrerez en pratique, et par toutes celles que vous pourrez imaginer!

**Remarque 2.2.** En pratique, pour calculer  $\int_I f(x) dx$ , on se ramène toujours à calculer l'intégrale de fonctions continues sur des segments, quitte à prendre ensuite des limites. Ce que nous assure le Fait 2.1, c'est que, si vous trouvez une manière raisonnable de donner un sens à  $\int_I f(x) dx$ , et si votre voisin trouve une autre manière (raisonnable aussi!) de donner un sens à  $\int_I f(x) dx$ , alors vous trouverez la même valeur. Attention, en général, ça ne marche que pour les fonctions à valeurs positives!

Nous allons maintenant donner deux situations importantes où on doit faire appel à la notion d'intégrales généralisées.

#### Intégrales de fonctions continues sur un intervalle infini

Soit  $a \in \mathbb{R}$ , et soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction continue. La fonction  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est alors croissante. Par conséquent, elle admet une limite quand  $x \rightarrow +\infty$ , qui peut éventuellement être  $+\infty$ . On a alors

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt \in [0, +\infty].$$

De la même manière, si  $g$  est continue sur  $] -\infty, b]$  à valeurs positives, et si  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$  à valeurs positives,

on a

$$\int_{-\infty}^b g(t) dt := \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b g(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt := \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x h(t) dt.$$

**Exemple 2.4.** Soit  $a > 0$  et  $\alpha > 0$ . Considérons la fonction  $f(t) := t^\alpha$  pour  $t \geq a$ . Si  $\alpha \neq 1$ , on a alors, pour tout  $x \geq a$ ,

$$\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[ -\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} \right]_a^x = \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right).$$

Si  $\alpha > 1$ , cette quantité tend vers  $\frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . En revanche, si  $\alpha < 1$ , cette quantité tend vers  $+\infty$ . Enfin, si  $\alpha = 1$ , on a

$$\int_a^x \frac{dt}{t} = \ln x - \ln a,$$

qui tend vers  $+\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Finalement, on a montré que

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Si  $f : [a, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$ , il est souvent important de savoir si elle est intégrable sur  $[a, +\infty[$ , c'est-à-dire si  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  est fini ou vaut  $+\infty$ . Pour répondre à cette question, on peut parfois calculer une primitive de  $f$ , mais ça n'est pas toujours possible. La proposition suivante donne un critère très simple pour que  $\int_a^{+\infty} f(t) dt < +\infty$ , en se ramenant à des questions de croissance comparée.

**Proposition 2.1.** [Critère de Riemann] Soit  $a \in \mathbb{R}$ , et soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction continue.

1. S'il existe  $\alpha > 1$  tel que  $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ , alors  $\int_a^{+\infty} f(t) dt < +\infty$ .
2. S'il existe  $\alpha < 1$  tel que  $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , alors  $\int_a^{+\infty} f(t) dt = +\infty$ .

*Démonstration.* 1. La fonction  $t \mapsto f(t)t^\alpha$  est continue et admet une limite en  $+\infty$ , donc elle est bornée : soit  $M > 0$  tel que, pour tout  $t \in [a, +\infty[$ , on a  $f(t)t^\alpha \leq M$ . On a alors

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^{+\infty} (t^\alpha f(t)) \times \frac{1}{t^\alpha} dt \leq M \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Cette quantité est bien finie, par (2.5).

2. La fonction  $t^\alpha f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , donc on peut trouver  $b > a$  tel que, pour tout  $t \geq b$ , on a  $t^\alpha f(t) \geq 1$ . On a alors

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(t) dt &\geq \int_b^{+\infty} f(t) dt \\ &= \int_b^{+\infty} (t^\alpha f(t)) \times \frac{1}{t^\alpha} dt \\ &\geq \int_b^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}, \end{aligned}$$

et cette quantité vaut  $+\infty$  par (2.5). □

**Remarque 2.3.** Bien entendu, on a le même résultat si on regarde une fonction continue sur  $] -\infty, a]$ . Il faut simplement regarder, à la place, la limite de  $|t|^\alpha f(t)$  quand  $t \rightarrow -\infty$ .

**Exemple 2.5.** Considérons la fonction  $f(t) = e^{-t^2}$ . Par croissance comparée, on a  $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc, par le critère de Riemann, on a  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt < +\infty$ . On a aussi  $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0$ , donc  $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt < +\infty$ .

## Intégrale de fonctions présentant une singularité

Si  $a < b$  sont des réels, et  $f$  est une fonction continue sur  $]a, b]$  et à valeurs positives, alors on a

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

**Exemple 2.6.** Soit  $\alpha > 0$ . On a (Exercice!)

$$\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

On en déduit un analogue de la Proposition 2.1, dont la preuve est laissée en exercice. Attention, ici, les rôles de  $\alpha > 1$  et  $\alpha < 1$  sont inversés!

**Proposition 2.2.** [Critère de Riemann] Soit  $a < b$  des réels, et soit  $f : ]a, b] \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction continue.

1. S'il existe  $\alpha < 1$  tel que  $(t-a)^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} 0$ , alors  $\int_a^b f(t) dt < +\infty$ .
2. S'il existe  $\alpha > 1$  tel que  $(t-a)^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} +\infty$ , alors  $\int_a^b f(t) dt = +\infty$ .

**Exemple 2.7.** Considérons la fonction  $f(t) = -\ln t$  sur  $]0, 1]$ . Elle est bien à valeurs positives, et  $\sqrt{t} \times (-\ln t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$  par croissance comparée. Par conséquent, l'intégrale  $\int_0^1 \ln t dt$  est bien finie.

## 2.4.2 Intégrales de fonctions de signe quelconque

**Fait 2.2.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle, et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $\int_I |f(x)| dx < +\infty$  (on dit que  $f$  est intégrable sur  $I$ ). On peut alors définir son intégrale  $\int_I f(x) dx$ .

Si  $I$  a pour extrémités (finies ou infinies)  $a$  et  $b$ , cette quantité est aussi notée  $\int_a^b f(x) dx$ .

Cette intégrale a toutes les propriétés usuelles :

- Si  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sont intégrables et si  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , alors

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_I f(x) dx + \mu \int_I g(x) dx$$

- Si  $I \cap J = \emptyset$  et si  $f : I \cup J \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable, alors

$$\int_{I \cup J} f(x) dx = \int_I f(x) dx + \int_J f(x) dx$$

- Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions intégrables sur  $I$ , avec, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , alors on a

$$\int_I f(x) dx \leq \int_I g(x) dx.$$

- On a

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx.$$

**Exemple 2.8.** Considérons la fonction  $f(t) = \cos t e^{-t^3}$  sur  $[0, +\infty[$ . Cette fonction n'est pas de signe constant, donc il n'est pas évident a priori qu'on puisse définir son intégrale. Néanmoins,  $f$  est continue, et on a  $t^2 |f(t)| \leq t^2 e^{-t^3}$ , qui tend vers zéro en  $+\infty$ . Par le critère de Riemann, on a bien  $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$ , donc on peut bien définir  $\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-t^3} dt$ .

**Remarque 2.4.** Si la condition  $\int_I |f(t)| dt < +\infty$  n'est pas vérifiée, il pourrait arriver que plusieurs méthodes pour définir  $\int_I f(t) dt$  ne donnent pas le même résultat. Quand on intègre une fonction présentant des singularités, ou quand on calcule une intégrale sur un intervalle non borné, il faut impérativement commencer par appliquer le critère de Riemann pour s'assurer que notre calcul a bien un sens!

**Remarque 2.5.** Toutes les propriétés énoncées dans le Fait 2.2 restent vraies pour une fonction à valeur complexes. Son intégrale est alors la somme de l'intégrale de sa partie réelle plus  $i$  fois l'intégrale de sa partie imaginaire.

**Pour la culture.** On a vu que l'intégrale de fonctions quelconques avait les mêmes propriétés que l'intégrale de fonctions continues sur un segment. En fait, il y a une propriété importante que cette nouvelle définition de l'intégrale n'a pas :

$$\text{Si } f \text{ est continue et } \int_I |f(t)| dt = 0, \text{ alors } f \text{ est la fonction nulle sur } I. \quad (2.6)$$

Cette propriété est fautive lorsque  $f$  n'est pas continue! Par exemple, si  $f$  vaut zéro partout, sauf en un point, son intégrale sera nulle.

On dit que  $f$  est nulle presque partout sur  $I$  si  $\int_I |f(t)| dt = 0$ . Pour comprendre exactement quelles sont les fonctions nulles presque partout sur  $I$ , il faut faire appel à la théorie de la mesure de Lebesgue.

# Chapitre 3

## Intégrales multiples

Dans ce chapitre, nous verrons comment intégrer des fonctions sur des parties de  $\mathbb{R}^d$ , grâce à la formule de Fubini et aux changements de variables.

### 3.1 Intégrales multiples de fonctions positives

**Fait 3.1.** Soit  $\Omega$  une partie de  $\mathbb{R}^d$ , et soit  $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction à valeurs positives. Alors on peut toujours définir la quantité

$$\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d \in [0, +\infty].$$

Cette quantité est souvent notée  $\int_{\Omega} f(x) dx$ , ou même  $\int_{\Omega} f$ .

Cette intégrale a les propriétés suivantes :

- Si  $f, g : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$  et si  $\lambda, \mu \geq 0$ , alors

$$\int_{\Omega} (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_{\Omega} f(x) dx + \mu \int_{\Omega} g(x) dx.$$

- Si  $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$  et si  $f : \Omega \cup \Omega' \rightarrow [0, +\infty[$ , alors

$$\int_{\Omega \cup \Omega'} f(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Omega'} f(x) dx.$$

- Si  $f$  est continue, à valeurs positives, et  $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$ , alors  $f \equiv 0$  sur  $\Omega$ .

**Définition 3.1.** Lorsque  $f$  est la fonction constante égale à 1 sur  $\Omega$ , alors la quantité

$$\int_{\Omega} dx$$

est appelée le volume de  $\Omega$  (ou l'aire si  $d = 2$ ). Cette quantité sera notée  $\text{Vol}(\Omega)$ .

**Remarque 3.1.** En pratique, on voudra toujours que  $\Omega$  soit un ensemble de dimension  $d$ . Par exemple, si  $d = 2$ ,  $\Omega$  pourra être un disque, un rectangle... Mais, dans ce cours, on n'intégrera pas une fonction sur une courbe (un cercle, par exemple).

**Remarque 3.2.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Comme dans le chapitre 2, on dira qu'une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est nulle presque partout si  $\int_{\Omega} |f|(x) dx = 0$ . Une fonction qui est nulle sauf sur un ensemble de dimension plus petit que  $d$  (sur une surface ou une courbe lorsque  $d = 3$ , par exemple) est toujours nulle presque partout.

Le Fait 3.1 nous assure que l'intégrale d'une fonction positive est toujours bien définie, mais ne nous explique pas comment la calculer. Pour calculer des intégrales dans  $\mathbb{R}^d$ , nous allons utiliser deux théorèmes fondamentaux : le théorème de Fubini-Tonelli<sup>1</sup> et la formule de changement de variables. Remarquons qu'il existe plusieurs analogues de la formule

1. Parfois appelé théorème de Fubini, ou théorème de Tonelli.

d'intégration par parties quand  $d \geq 2$ , mais nous ne les verrons pas dans ce cours.

### 3.1.1 Le théorème de Fubini-Tonelli

**Théorème 3.1** (Théorème de Fubini-Tonelli). Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ensemble, et soit  $I \subset \mathbb{R}$  un segment. Soit  $f : \Omega \times I \rightarrow [0, +\infty[$  une fonction à valeurs positives. On a alors

$$\int_{\Omega \times I} f = \int_{\Omega} \left( \int_I f(x, t) dt \right) dx = \int_I \left( \int_{\Omega} f(x, t) dx \right) dt. \quad (3.1)$$

Par exemple, si  $I$  et  $J$  sont des intervalles réels, et si  $f$  est une fonction sur  $I \times J$  à valeurs positives, alors pour calculer  $\int_{I \times J} f$ , on peut calculer  $\int_I \left( \int_J f(x, y) dy \right) dx$  ou  $\int_J \left( \int_I f(x, y) dx \right) dy$ , ça nous donnera le même résultat!

**Exemple 3.1.** Considérons la fonction  $f(x, y) = x^3y + y^2 + 1$ , définie pour  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , et calculons son intégrale sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Calculons tout d'abord, pour chaque  $x \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dy &= \int_0^1 (x^3y + y^2 + 1) dy \\ &= \left[ x^3 \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + y \right]_0^1 \\ &= \frac{x^3}{2} + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ceci nous donne donc une fonction de  $x$ , qu'il faut maintenant intégrer de 0 à 1. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx &= \int_0^1 \left( \frac{x^3}{2} + \frac{4}{3} \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^4}{8} + \frac{4x}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{8} + \frac{4}{3} = \frac{35}{24}. \end{aligned}$$

Calculons maintenant  $\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$ , pour s'assurer que le théorème de Fubini-Tonelli ne nous ment pas. On commence, pour chaque  $y \in [0, 1]$ , par calculer

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^3y + y^2 + 1) dx &= \left[ \frac{x^4y}{4} + x(y^2 + 1) \right]_0^1 \\ &= \frac{y}{4} + y^2 + 1. \end{aligned}$$

Ceci nous donne donc une fonction de  $y$ , qu'il faut intégrer de 0 à 1. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy &= \int_0^1 \left( \frac{y}{4} + y^2 + 1 \right) dy \\ &= \left[ \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{3} + y \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{35}{24}. \end{aligned}$$

On trouve le même résultat que précédemment : le théorème de Fubini-Tonelli ne nous a pas menti!

Le théorème de Fubini-Tonelli est très utile, car il permet de se ramener à ne calculer que des intégrales sur des segments, ce que l'on sait faire grâce aux techniques du chapitre précédent. On pourrait avoir l'impression que le théorème de Fubini-Tonelli ne permet que de calculer des intégrales sur des produits d'intervalles (par exemple, dans  $\mathbb{R}^2$ , il ne permet de calculer que des intégrales sur des rectangles). Il n'en est rien! Nous allons voir dans l'exemple suivant comment calculer l'aire d'un disque grâce à ce théorème.



**Exemple 3.2** (Calcul de l'aire d'un disque). Nous allons calculer l'aire d'un quart de disque de rayon  $r$  :

$$\Omega := \{(x, y) \in [0, r] \times [0, r] \text{ tels que } x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Pour cela, définissons la fonction  $f$  sur  $[0, r] \times [0, r]$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,  $f$  vaut 1 sur  $\Omega$ , et 0 en dehors de  $\Omega$ . L'aire de  $\Omega$  est donc donnée par  $\int_{[0,r] \times [0,r]} f(x, y) \, dx \, dy$ . Calculons cette aire à l'aide du théorème de Fubini-Tonelli.

$$\text{Pour chaque } y \in [0, r], \text{ on a } f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{r^2 - y^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\int_0^r f(x, y) \, dx = \int_0^{\sqrt{r^2 - y^2}} dx = \sqrt{r^2 - y^2},$$

puis

$$\int_{[0,r] \times [0,r]} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} \, dy.$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue un changement de variables, en posant  $y = r \sin s$ , de sorte que  $dy = r \cos s \, ds$  et  $\sqrt{r^2 - y^2} = r \sqrt{1 - \sin^2 s} = r \cos s$ . On a donc

$$\begin{aligned} \int_{[0,r] \times [0,r]} f(x, y) \, dx \, dy &= r^2 \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \cos^2(s) \, ds \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2s)}{2} \, ds \\ &= \frac{\pi r^2}{4}. \end{aligned}$$

On en déduit bien que l'aire d'un disque de rayon  $r$  vaut  $\pi r^2$  !

**Remarque 3.3.** Quand on écrit  $\int_0^1 \int_0^2 f(x, y) \, dx \, dy$ , il est sous-entendu que cela signifie  $\int_0^1 \left( \int_0^2 f(x, y) \, dx \right) dy$ . C'est donc  $x$  qui va de 0 à 2, et  $y$  qui va de 0 à 1. Pour ne pas se tromper, il est souvent commode de réécrire cette quantité  $\int_0^1 dy \int_0^2 dx f(x, y)$ , ou encore  $\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^1 f(x, y) \, dx \, dy$ .

### 3.1.2 Changements de variables

**Définition 3.2.** Soit  $\Omega$  une partie de  $\mathbb{R}^d$ , et soit  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  une application  $C^1$ . Notons-la  $\varphi(x_1, \dots, x_d) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_d), \dots, \varphi_d(x_1, \dots, x_d))$ . Si  $(x_1, \dots, x_d) \in \Omega$ , la matrice Jacobienne de  $\varphi$  en  $(x_1, \dots, x_d)$  est la matrice dont les entrées sont les

$$J_\varphi(x_1, \dots, x_d) := \left( \frac{\partial \varphi_i(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

**Exemple 3.3** (Coordonnées polaires). On définit l'application

$$\varphi : \begin{cases} ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{cases} \quad (3.2)$$

On a

$$J_\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut  $r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$ .

**Théorème 3.2** (Théorème de changement de variable pour les intégrales multiples). Soit  $\Omega$  une partie de  $\mathbb{R}^d$ , et soit  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  une application  $C^1$  et injective.

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y_1, \dots, y_d) dy_1 \cdots dy_d = \int_{\Omega} f(\varphi(x_1, \dots, x_d)) \times |\det J_{\varphi}(x_1, \dots, x_d)| dx_1 \cdots dx_d.$$

### Coordonnées polaires

On considère l'application  $\varphi$  définie dans (3.2). Cette application est bien injective (Exercice), et on a

$$\varphi([0, +\infty[ \times [0, 2\pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

En effet, si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , on pose

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \begin{cases} \arccos(x/r) & \text{si } y \geq 0 \\ -\arccos(x/r) & \text{si } y < 0, \end{cases}$$

et on a bien  $\varphi(r, \theta) = (x, y)$ .

Enfin, on a vu que  $\det J_{\varphi}(r, \theta) = r$ . On a donc, pour toute fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty[$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} f(x, y) dx dy = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr.$$

En fait, comme ajouter ou enlever un point au domaine d'intégration ne change rien à la valeur de l'intégrale, cette formule se réécrit

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d\theta dr.$$

**Exemple 3.4** (Calcul de l'aire d'un disque 2.0). Soit  $R > 0$ . Considérons la fonction  $f$  valant 1 sur le disque de centre 0 et de rayon  $R$ , et nulle en dehors de ce disque. On a donc  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 1$  si et seulement si  $(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2$  est inférieur à  $R^2$ . On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\theta dr \\ &= \int_0^R 2\pi r dr \\ &= \pi R^2. \end{aligned}$$

On retrouve donc bien la valeur de l'aire d'un disque!

Dans l'exemple suivant, nous allons utiliser notre connaissance des coordonnées polaires pour calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ , qui, rappelons-le, existe bien grâce au critère de Riemann. La fonction  $x \mapsto e^{-x^2}$ , appelée gaussienne, est omniprésente en mathématiques (par exemple, en probabilités, où elle correspond à la *loi normale*; voir aussi le chapitre sur les transformées de Fourier), mais il n'est pas possible d'en trouver une primitive s'exprimant à l'aide de fonctions usuelles.

**Exemple 3.5.** [Calcul de l'intégrale d'une gaussienne] Notons  $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ . Cette fonction est à valeurs positives, donc par le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 - y^2} dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) dy = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \times \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right),$$

où, dans la dernière égalité, on a juste utilisé le fait que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$  ne dépendait pas de  $y$ , et était donc une constante pouvant être sortie de l'intégrale. Finalement, on a  $\int_{\mathbb{R}^2} f = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2$ .

Mais, en utilisant le changement de coordonnées polaire, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta dr \\ &= 2\pi \int_{r=0}^{+\infty} e^{-r^2} r dr \quad \text{car l'intégrande ne dépend pas de } \theta \\ &= 2\pi \left[ \frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

### Coordonnées sphériques

De la même manière, on peut considérer

$$\varphi : \begin{cases} ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \times ]0, \pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \alpha) \mapsto (r \cos \theta \sin \alpha, r \sin \theta \sin \alpha, r \cos \alpha), \end{cases}$$

et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\alpha=0}^{\pi} f(r \cos \theta \sin \alpha, r \sin \theta \sin \alpha, r \cos \alpha) r^2 \sin \alpha dr d\theta d\alpha.$$

## 3.2 Intégrales de fonctions de signe quelconque

**Fait 3.2.** Si  $\Omega$  est une partie bornée de  $\mathbb{R}^d$ , et si  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, alors on peut définir  $\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d$ . Pour calculer cette intégrale, on peut utiliser le théorème de Fubini, ou la formule de changement de variables.

Plus généralement, si  $\Omega$  est une partie de  $\mathbb{R}^d$  (pas forcément bornée), et si  $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction (pas forcément continue), alors, si  $\int_{\Omega} |f(x_1, \dots, x_d)| dx_1 \cdots dx_d < +\infty$ , on peut définir  $\int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d$ . Pour calculer cette intégrale, on peut utiliser le théorème de Fubini, ou la formule de changement de variables.

**Exemple 3.6.** Considérons la fonction continue  $f(x, y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$ . Peut-on donner un sens à  $\int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^1 f(x, y) dx dy$  ?

Soit  $y \in ]0, 1]$ . La fonction  $x \mapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , et on a  $x^2 |2e^{-2xy} - e^{-xy}| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ,

donc, par le critère de Riemann, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x, y) dx$  est bien définie.

On a

$$\int_0^{+\infty} f(x, y) dx = \left[ -\frac{2e^{-2xy}}{2y} + \frac{e^{-xy}}{y} \right]_0^{+\infty} = 0.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 \left( \int_0^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = 0.$$

D'autre part, pour chaque  $x > 0$ , on a

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \left[ -\frac{2e^{-2xy}}{2x} + \frac{e^{-xy}}{x} \right]_0^1 = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}.$$

Mais, pour tout  $x > 0$ , on a  $\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} > 0$ . Par conséquent, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$  est bien définie, et est strictement positive.

Par conséquent, on a

$$\int_0^1 \left( \int_0^{+\infty} f(x, y) \, dx \right) dy \neq \int_0^{+\infty} \left( \int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Il est donc indispensable de s'assurer que  $\int_{\Omega} |f| < +\infty$  avant de se lancer dans le calcul d'une intégrale multiple : sinon, le calcul qu'on fera risque de n'avoir aucun sens, et de donner un résultat différent du calcul de mon voisin !

**Remarque 3.4.** Pour s'assurer que  $\int_{I_1 \times I_2} |f(x, y)| \, dx dy < +\infty$ , on applique en général le théorème de Fubini. En effet, il suffit que  $\int_{I_2} \left( \int_{I_1} |f(x, y)| \, dx \right) dy < +\infty$  ou que  $\int_{I_1} \left( \int_{I_2} |f(x, y)| \, dy \right) dx < +\infty$  pour que l'intégrale soit bien définie.

# Chapitre 4

## Espaces $L^p$

Dans tout ce chapitre,  $\Omega$  sera une partie de  $\mathbb{R}^d$ , et on s'intéressera à des fonctions de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Plus précisément, on s'intéressera à l'ensemble des fonctions de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  dont la puissance  $p^{\text{ème}}$  est intégrable. Nous verrons que cet ensemble de fonctions forme un espace vectoriel normé.

### 4.1 Fonctions $L^p$

**Définition 4.1.** Soit  $p \in [1, +\infty[$ . Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que  $f \in L^p(\Omega)$  si  $|f|^p$  est intégrable sur  $\Omega$ , c'est-à-dire si  $\int_{\Omega} |f|^p < +\infty$ . On note alors  $\|f\|_p$  la norme  $L^p$  de  $f$ , définie par

$$\|f\|_p := \left( \int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p}.$$

Remarquons que, pour  $p = 1$ , on a juste  $\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f|$ .

**Exemple 4.1.** Dans cet exemple,  $d = 1$ , et  $f(x) = \frac{1}{x}$

- Si  $\Omega = [1, +\infty[$ , on sait que  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  converge si et seulement si  $p > 1$ . Ainsi,  $f$  est dans  $L^p(\Omega)$  pour tout  $p > 1$ , mais pas pour  $p = 1$ .
- Si  $\Omega = ]0, 1[$ , on sait que  $\int_0^1 \frac{dx}{|x|^p}$  converge si et seulement si  $p < 1$ . Ainsi,  $f$  n'est dans aucun espace  $L^p$  pour  $p \in [1, +\infty[$ .

**Définition 4.2.** Soient  $p, q \in [1, +\infty[$ . On dit que  $p$  et  $q$  sont des exposants conjugués si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Théorème 4.1** (Inégalité de Hölder). Soient  $p, q \in [1, +\infty[$  deux exposants conjugués. Alors, pour toutes fonctions  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , on a

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que, pour tout  $a, b > 0$ , on a

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \tag{4.1}$$

Le logarithme étant concave, on a

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) &\geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) \\ &= \log(a) + \log(b) = \log(ab), \end{aligned}$$

d'où (4.1) par croissance du logarithme. Remarquons que (4.1) reste trivialement vraie quand  $a$  ou  $b$  est nul.

En supposant  $f$  et  $g$  non identiquement nulles, on pose

$$a(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{et} \quad b(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}.$$

En appliquant (4.1) à  $a(x)$  et  $b(x)$ , on obtient donc que, pour presque tout  $x \in \Omega$ , on a

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q},$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

**Corollaire 4.1.** Si  $\Omega$  est de volume finie, les espaces  $L^p(\Omega)$  sont décroissants avec  $p$ , i.e.,  $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  pour  $1 \leq q \leq p < +\infty$ .

*Démonstration.* Soit  $1 \leq q < p \leq +\infty$ , et  $f \in L^p(\Omega)$ . On a  $\frac{p}{q} > 1$ , donc  $\frac{p}{q}$  admet un exposant conjugué, que l'on notera  $r$ .

On écrit

$$f^q = f^q \times 1,$$

où 1 est la fonction étant partout égale à 1. La fonction  $f^q$  appartient à  $L^{p/q}$ , car  $\int_{\Omega} |f^q|^{p/q} = \int_{\Omega} |f|^p < +\infty$  par hypothèse. D'autre part, on a  $\int_{\Omega} |1|^r = \text{Vol}(\Omega)$ , donc  $1 \in L^r(\Omega)$ . On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder pour conclure que

$$\int_{\Omega} |f|^q = \|f^q\|_1 \leq \|f^q\|_{p/q} \times \|1\|_r < +\infty.$$

□

**Théorème 4.2** (Inégalité de Minkowski). Soient  $p \in [1, +\infty[$  et  $f, g \in L^p(\Omega)$ . Alors  $f + g \in L^p(\Omega)$  et

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (4.2)$$

**Corollaire 4.2.** Pour tout  $p \in ]1, +\infty[$ , l'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace vectoriel.

*Démonstration du corollaire.* L'inégalité de Minkowski nous assure que la somme de deux fonctions dans  $L^p(\Omega)$  est également dans  $L^p(\Omega)$ . Il reste donc à montrer que, si  $f \in L^p(\Omega)$  et si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $(\lambda f) \in L^p(\Omega)$ . Cela découle du fait que  $\int_{\Omega} |\lambda f|^p = |\lambda|^p \int_{\Omega} |f|^p < +\infty$ . □

*Démonstration du théorème.* (Hors programme) Montrons d'abord que

$$|f + g|^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p). \quad (4.3)$$

En effet, si  $|f(x)| \leq |g(x)|$ , on a  $|f + g|^p(x) \leq |2g(x)|^p$ , et, si  $|g(x)| \leq |f(x)|$ , on a  $|f + g|^p(x) \leq |2f(x)|^p$ . Ainsi,  $|f + g|^p(x)$  est bien toujours plus petite que  $2^p (|f|^p(x) + |g|^p(x))$ .

Ainsi, on a  $f + g \in L^p$ . Montrons maintenant (4.2).

On a

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x) + g(x)| \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| \, dx + \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)| \, dx. \end{aligned}$$

Or  $f, g \in L^p$  et  $|f + g|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$ . Notons  $q = \frac{p}{p-1}$ . On a  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} + \frac{1}{p} = 1$ , donc les exposants  $p$  et  $q$  sont conjugués. On peut donc appliquer la question précédente pour obtenir

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left( \int_{\Omega} (|f(x) + g(x)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat, en divisant chaque membre par  $\|f + g\|_p^{p-1}$ .  $\square$

## 4.2 L'espace $L^p$ comme espace vectoriel normé

**Convention :** dans tout ce chapitre, on fera comme si toute fonction nulle presque partout est en fait la fonction nulle.

**Remarque 4.1.** *Mathématiquement, faire une telle convention, cela signifie travailler dans un espace quotient. C'est-à-dire qu'on ne fait pas de différence entre deux éléments d'un espace s'ils vérifient une certaine relation. Par exemple, en géométrie, on ne fait pas de différence entre deux triangles s'ils ont les mêmes angles et des côtés de mêmes longueurs. Ici, on ne fait pas de différence entre deux fonctions  $f$  et  $g$  si  $f - g$  est nulle presque partout.*

**Proposition 4.1.** *Pour tout  $p \in [1, +\infty[$ ,  $\|\cdot\|_p$  est une norme sur l'espace vectoriel  $L^p(\Omega)$ , c'est-à-dire que :*

- Pour tout  $f \in L^p(\Omega)$ , on a  $\|f\|_p \geq 0$ .
- $\|f\|_p = 0$  si et seulement si  $f = 0$ .
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ .
- Si  $f, g \in L^p(\Omega)$ , on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

*Démonstration.* Le fait que  $L^p(\Omega)$  est un espace vectoriel a été prouvé dans le corollaire 4.2. Le premier point découle de la définition. Le second point vient de la convention qu'on a prise : si  $\|f\|_p = 0$ , cela signifie que  $\int_{\Omega} |f|^p(x) dx$  est nulle, c'est-à-dire que  $|f|^p$  est nulle presque partout. Par convention, dans ce chapitre, une fonction nulle presque partout, c'est la même chose que la fonction nulle.

Le troisième point découle des propriétés de l'intégrale, tandis que le dernier point est exactement le théorème 4.2.  $\square$

**Définition 4.3.** *Soit  $p \in [1, +\infty]$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions appartenant toutes à  $L^p(\Omega)$ , et soit  $f \in L^p(\Omega)$ . On dit que  $(f_n)$  converge vers  $f$  dans  $L^p$  si  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ , c'est-à-dire si*

$$\int_{\Omega} |f_n - f|^p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

**Remarque 4.2.** *Bien qu'il n'apparaîtra pas dans ce cours, on définit aussi l'espace  $L^\infty(\Omega)$  comme l'ensemble des fonctions bornées sur  $\Omega$ , muni de la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ . Là encore, il s'agit d'un espace vectoriel normé. L'inégalité de Hölder reste vraie lorsque  $p = 1$  et  $q = +\infty$ .*

*La convergence dans  $L^\infty(\Omega)$  correspond à la convergence uniforme, que l'on verra au chapitre prochain.*

## 4.3 L'espace $L^2$

**Définition 4.4.** *Soient  $f, g \in L^2(\Omega)$ . On définit le produit scalaire entre  $f$  et  $g$  par<sup>a</sup>*

$$\langle f, g \rangle := \int_{\Omega} f \bar{g}.$$

<sup>a</sup> Certain auteurs préfèrent définir le produit scalaire comme  $\int_{\Omega} \bar{f} g$ . Ce désaccord durera aussi longtemps que la guerre entre droitiers et gauchers...

Cette quantité est bien définie, grâce à l'inégalité de Hölder. Celle-ci nous dit que

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Cette inégalité, très importante, porte également le nom de *d'inégalité de Cauchy-Schwarz*.

Ce produit scalaire possède toutes les propriétés d'un *produit scalaire complexe* (ou *produit hermitien*), à savoir<sup>1</sup> :

- Pour tout  $f, g \in L^2(\Omega)$ , on a

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

- Pour tout  $f_1, f_2, g \in L^2(\Omega)$  et tout  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle$$

$$\langle g, \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle g, f_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle g, f_2 \rangle.$$

### Analogie avec la géométrie euclidienne

Si  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , on peut définir leur produit scalaire de deux manières :

- Soit par la formule  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$ .
- Soit par la formule  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\theta(\vec{u}, \vec{v}))$ , où  $|\vec{u}|$  désigne la norme de  $\vec{u}$ ,  $|\vec{v}|$  la norme de  $\vec{v}$ , et  $\theta(\vec{u}, \vec{v})$  est l'angle formé entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

En fait, la première formule est souvent utilisée pour définir le produit scalaire, à partir des coordonnées de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , tandis que la deuxième peut être utilisée pour *définir mathématiquement la notion d'angle*.

Dans l'espace  $L^2$ , on peut aussi définir l'angle entre deux fonctions  $f$  et  $g$  non nulles, en disant que

$$\cos(\theta(f, g)) = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|_2 \|g\|_2}.$$

Si cette notion est assez peu souvent utilisée, on utilise souvent la notion d'orthogonalité, qui correspond à ce que le cosinus de l'angle entre deux fonctions soit nul.

$$\text{On dit que } f \text{ et } g \text{ sont orthogonales si } \int_{\Omega} f \bar{g} = 0.$$

1. Bien entendu, si les fonctions considérées sont à valeurs réelles, on n'a pas besoin des conjugués complexes dans ces formules



# Chapitre 5

## Suites de fonctions

Dans tout ce chapitre,  $\Omega$  sera une partie de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathbb{K}$  sera égal à  $\mathbb{R}$  ou à  $\mathbb{C}$ , et on considérera une suite de fonction  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ , et une autre fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Le but du chapitre est de donner un sens à la phrase « La suite  $(f_n)$  converge vers  $f$  ». On a déjà vu au chapitre précédent la notion de convergence dans  $L^p$ . Nous allons voir qu'il y a d'autres notions naturelles de convergence. Une question fondamentale, qui nous intéressera pendant une grande partie du chapitre est la suivante : quand peut-on dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx ?$$

### 5.1 Convergence simple et convergence uniforme

**Définition 5.1.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , et, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n$  une fonction de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . On dit que

- La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  si, pour tout  $x \in \Omega$ , on a  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ .
- La suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  si la suite  $\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|$  converge vers zéro.

De façon plus formelle, dire que  $f_n$  converge simplement vers  $f$ , c'est dire que

$$\forall x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq n_0 \text{ on a } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Il faut bien comprendre que, dans la définition ci-dessus, le  $n_0$  à partir duquel on a  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  dépend de  $x$ . On a convergence uniforme lorsque ce  $n_0$  peut être choisi indépendamment de  $x$ . C'est-à-dire que  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  quand

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq n_0 \text{ et tout } x \in \Omega, \text{ on a } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

**Remarque 5.1.** Si  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ , alors  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$ . Nous verrons par la suite que la réciproque n'est pas vraie.

**Exemple 5.1.** Sur  $\Omega = \mathbb{R}$ , considérons la suite de fonction  $f_n(x) = x + \frac{\sin x}{n+1}$ , et la fonction  $f(x) = x$  (voir la figure 5.1). Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin x|}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ . Ceci étant vrai pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ . Ceci est une suite qui tend vers zéro. Par conséquent,  $(f_n)$  converge vers  $f$  uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 5.2.** Sur  $\Omega = [0, 1[$ , on considère  $f_n(x) = x^n$  et  $f(x) = 0$  (voir la figure 5.2).

- Soit  $x \in [0, 1[$ . Comme  $|x| < 1$ , on a  $x^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Ainsi,  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ . Ceci étant vrai pour tout  $x \in [0, 1[$ , la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1[} x^n = 1$ . Cette suite ne tend pas vers zéro, donc  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$ .

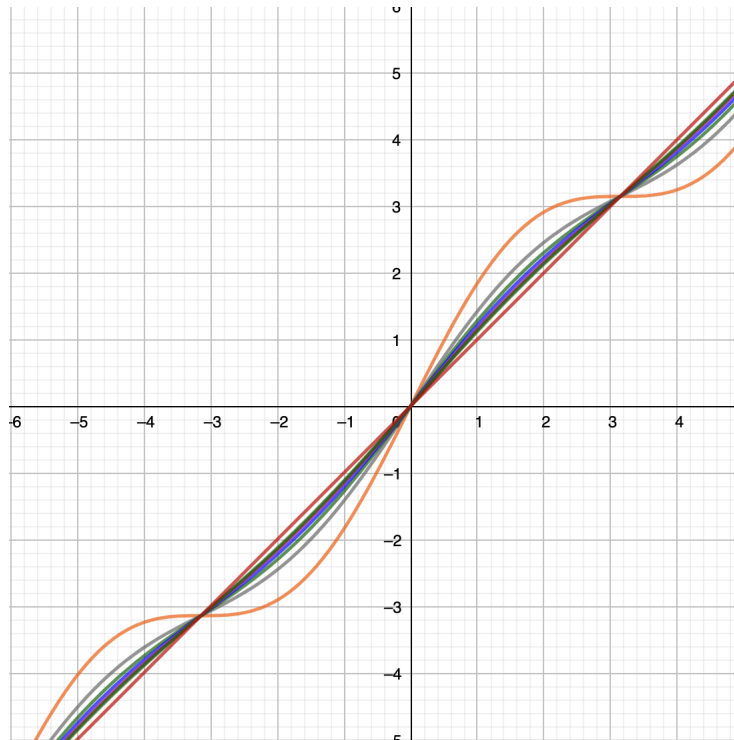


FIGURE 5.1 – Une suite de fonctions convergeant uniformément

**Méthode.** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions sur  $\Omega$ , et soit  $f$  une fonction sur  $\Omega$ .

- Pour montrer que  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$ , on rédige toujours comme ceci :  
Soit  $x \in \Omega$ . On a  $|f_n(x) - f(x)| = \dots \leq \dots$ , qui tend vers zéro quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ceci étant vrai pour tout  $x \in \Omega$ , on en déduit que  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$ .
- Pour montrer que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ , on rédige toujours comme ceci :  
Soit  $x \in \Omega$ . On a  $|f_n(x) - f(x)| = \dots \leq \dots$ . Cette quantité **ne dépend pas de**  $x$  et tend vers zéro quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Par conséquent,  $(f_n)$  converge vers  $f$  uniformément sur  $\Omega$ .
- Pour montrer que  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$ , on a deux méthodes :
  - On trouve, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  un  $x_n \in \Omega$  tel que  $f_n(x_n) - f(x)$  ne tend pas vers zéro.
  - On calcule, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)|$ . Pour faire cela, on peut calculer la dérivée (ou, en dimension  $\geq 2$ , le gradient) de  $f_n - f$ , afin de trouver ses maxima et ses minima.

## 5.2 Propriétés de la convergence uniforme

### 5.2.1 Interspersion de limite et d'intégrale, première partie

Une question qui nous occupera beaucoup dans ce chapitre est la suivante : supposons que  $(f_n)$  est une suite de fonctions sur  $\Omega$  qui converge en un certain sens vers  $f$ . A-t-on alors

$$\int_{\Omega} f_n(x) \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x) \, dx ? \quad (5.1)$$

Remarquons tout d'abord que, si  $(f_n)$  converge vers  $f$  dans  $L^1$ , alors on a bien (5.1). En effet, on a

$$\left| \int_{\Omega} f_n(x) \, dx - \int_{\Omega} f(x) \, dx \right| = \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| \, dx = \|f_n - f\|_1.$$

En revanche, la convergence simple n'est pas suffisante pour avoir (5.1), comme nous allons le voir dans l'exemple suivant.



FIGURE 5.2 – Une suite de fonctions ne convergeant pas uniformément

**Exemple 5.3.** *Considérons, sur  $\mathbb{R}$ , la suite de fonctions*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $n+1 > x$ , on a  $f_n(x) = 0$ , donc  $(f_n(x))_n$  converge vers zéro. Ainsi, la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers zéro. Mais*

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = \int_n^{n+1} dx = 1,$$

*qui ne converge pas vers  $\int_{\mathbb{R}} 0 \, dx = 0$ .*

*Ainsi, il ne suffit pas qu'une suite de fonctions  $f_n$  converge simplement vers  $f$  pour que  $\int_{\Omega} f_n(x) \, dx$  converge vers  $\int_{\Omega} f(x) \, dx$ .*

Pour finir, nous allons voir que la convergence uniforme suffit à avoir (5.1) lorsque  $\Omega$  est de volume fini.

**Théorème 5.1.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ensemble de volume fini, et soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $(f_n)$  converge uniformément vers une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors*

$$\int_{\Omega} f_n(x) \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x) \, dx.$$

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition de la convergence uniforme, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ , et pour tout  $x \in \Omega$ , on a  $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(\Omega)}$ . On a donc, pour tout  $n \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f_n(x) \, dx - \int_{\Omega} f(x) \, dx \right| &= \left| \int_{\Omega} (f_n(x) - f(x)) \, dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| \, dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(\Omega)} \int_{\Omega} dx \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit bien que  $\int_{\Omega} f_n(x) \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x) \, dx$ . □

**Exemple 5.4.** Attention, le résultat n'est en général pas vrai si  $\Omega$  n'est pas de volume fini! Par exemple, sur  $\Omega = [0, +\infty[$ , considérons la suite de fonctions  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [n, 2n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Cette suite de fonctions converge bien uniformément vers la fonction nulle. Cependant, on a

$$\int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_n^{2n} \frac{dx}{n} = n \times \frac{1}{n} = 1,$$

qui ne tend pas vers  $\int_{\Omega} 0 dx$ .

### 5.2.2 Propriétés de la fonction limite

**Théorème 5.2.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , et soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $(f_n)$  converge uniformément vers une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est continue.

*Démonstration.* Soit  $x \in \Omega$ , et soit  $\varepsilon > 0$ . Par définition de la convergence uniforme, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $y \in \Omega$ , on a  $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Mais  $f_n$  est continue en  $x$ , donc il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $y \in \Omega$  tel que  $\|y - x\| \leq \delta$ , on a  $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Par conséquent, si  $y \in \Omega$  est tel que  $\|y - x\| \leq \delta$ , on a

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit bien que  $f$  est continue en  $x$ . Ceci étant vrai pour tout  $x \in \Omega$ ,  $f$  est continue sur  $\Omega$ . □

**Exemple 5.5.** Attention, ce résultat est faux quand on a juste convergence simple! Par exemple, prenons  $\Omega = [0, 1]$ , et  $f_n(x) = x^n$ . Alors  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ , qui n'est pas continue.

**Exemple 5.6.** Sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , considérons la suite de fonction  $(f_n)$  donnée par  $f_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^k \sin(x^k)}{1+k^2}$ . Pour chaque  $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , ceci est le terme général d'une série absolument convergente. Notons sa limite  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k \sin(x^k)}{1+k^2}$ . On a

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k \sin(x^k)}{1+k^2} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \frac{x^k \sin(x^k)}{1+k^2} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k(1+k^2)}. \end{aligned}$$

Cette quantité est bien indépendante de  $x$ . De plus, cette quantité est le reste d'une série convergente, donc tend vers zéro. On en déduit que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ .

Chacune des fonctions  $f_n$  étant continue, la fonction  $f$  est donc continue sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

Le résultat suivant permet d'affirmer qu'une limite de fonctions est  $C^1$ . Attention, on ne l'énonce que pour des fonctions sur un intervalle réel!

**Théorème 5.3.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle, et soit  $(f_n)$  une suite de fonctions  $C^1$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que

- La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f$ .
- La suite de fonctions  $(f'_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $g$ .

Alors la fonction  $f$  est  $C^1$  sur  $I$ , et on a  $f' = g$ .

*Démonstration.* Notons  $h_n(x) := \int_a^x f'_n(t) dt$ , de sorte que  $h_n(x) = f_n(x) - f_n(a)$ . Par hypothèse, pour tout  $x \in I$ , la suite  $(h_n(x))_n$  converge vers  $f(x) - f(a)$ .

Mais, d'autre part, on peut refaire le même raisonnement que dans la preuve du théorème 5.1 pour déduire que  $\int_a^x f'_n(t) dt$  converge vers  $\int_a^x g(t) dt$ .

Par unicité de la limite, on déduit que

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t) dt.$$

Ceci étant vrai pour tout  $x$ ,  $g$  est la dérivée de  $f$ . Par le théorème 5.2,  $g$  est continue, donc la fonction  $f$  admet une dérivée continue :  $f$  est donc bien  $C^1$ .  $\square$

**Exemple 5.7.** Considérons la fonction  $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k^3}$ , et montrons qu'elle est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Notons  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(kx)}{k^3}$ .

Pour chaque  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\left| \frac{\cos(kx)}{k^3} \right| \leq \frac{1}{k^3}$ , qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi, la somme  $\sum_{k=1}^n \frac{\cos(kx)}{k^3}$  est absolument convergente. La suite  $(f_n(x))_n$  converge donc simplement (et même uniformément) vers  $f$ .

Pour chaque  $n$ , la fonction  $f_n$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et on a  $f'_n(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k^2}$ . Pour chaque  $x \in \mathbb{R}$ , cette série est absolument convergente et converge donc vers  $g(x) := -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ . On a

$$\begin{aligned} |g(x) - f'_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Cette quantité est indépendante de  $x$ , et tend vers zéro quand  $n \rightarrow +\infty$ , car c'est le reste d'une série convergente. Par conséquent,  $(f'_n)$  converge vers  $g$  uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

On déduit du théorème 5.3 que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$f'(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}.$$

### 5.3 Intersion de limite et d'intégrale, le retour

L'une des questions centrales de ce chapitre, nous l'avons dit, est de savoir si, lorsque  $(f_n)$  converge vers  $f$ , on a

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx. \quad (5.2)$$

On a vu que (5.2) était vraie lorsque  $(f_n)$  converge uniformément et que  $\text{Vol}(\Omega)$  est fini. Néanmoins on aura souvent envie d'utiliser (5.2) lorsque  $\Omega$  n'est pas de volume fini, et lorsque la convergence n'est pas uniforme. Nous allons donc voir deux théorèmes fondamentaux, permettant de déduire (5.2) sous des hypothèses très générales.

**Théorème 5.4** (Théorème de convergence monotone). Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\Omega$  dans  $[0, +\infty[$  convergeant simplement vers une fonction  $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$ .

On suppose que la suite de fonctions  $(f_n)$  est **croissante**, c'est-à-dire que, pour tout  $x \in \Omega$ , la suite  $(f_n(x))_n$  est croissante. On a alors

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

**Exemple 5.8.** Déterminons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n+1}}}{1+x} dx$ .

Pour chaque  $x \geq 0$ , la suite  $\left(\frac{x}{n+1}\right)_n$  est décroissante et tend vers zéro, donc la suite  $\left(\frac{e^{-\frac{x}{n+1}}}{1+x}\right)_n$  est croissante. Par continuité de l'exponentielle, elle tend vers  $\frac{e^0}{1+x} = \frac{1}{1+x}$ . Ainsi, la suite  $f_n$  est croissante et converge simplement vers  $\frac{1}{1+x}$ . On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n+1}}}{1+x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = +\infty.$$

**Théorème 5.5** (Théorème de convergence dominée). Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que

1.  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .
2. Il existe une fonction  $g : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$  telle que  $\int_{\Omega} g(x) dx < +\infty$  et telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \Omega$ , on a  $f_n(x) \leq g(x)$ .

Alors  $f$  est intégrable sur  $\Omega$ , et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

En particulier,

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx.$$

Attention, le résultat est faux si l'hypothèse 2. n'est pas vérifiée : voir les exemples 5.3 et 5.4 ci-dessus.

**Exemple 5.9.** Soit  $\Omega = [0, +\infty[$ . Posons  $f_n(x) = \sin\left(\frac{x^3}{n^3}\right) e^{-x}$ . Cette fonction est continue sur  $[0, +\infty[$ , et, par le critère de Riemann, elle est bien intégrable sur  $[0, +\infty[$ . Nous allons chercher à déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{x^3}{n^3}\right) e^{-x} dx$ . Remarquons que

- La fonction  $\sin\left(\frac{x^3}{n^3}\right) e^{-x}$  n'admet pas de primitive ayant une expression en terme de fonctions élémentaire, donc il n'est pas évident de calculer  $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{x^3}{n^3}\right) e^{-x} dx$ .
- Nous verrons par la suite que  $(f_n)$  converge simplement vers zéro, mais elle ne converge pas uniformément vers zéro : on ne peut pas appliquer le théorème 5.1.

Nous allons donc devoir utiliser le théorème de convergence dominée.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{x^3}{n^3}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Comme la fonction sinus est continue et  $\sin(0) = 0$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{x^3}{n^3}\right) = 0$ , et donc que  $f_n$  converge simplement vers la fonction nulle.

Pour chaque  $x \in [0, +\infty[$  et chaque  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\left| \sin\left(\frac{x^3}{n^3}\right) e^{-x} \right| \leq e^{-x}.$$

On a  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx < +\infty$ . On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, avec  $g(x) = e^{-x}$ , et  $f(x) = 0$ . On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{x^3}{n^3}\right) e^{-x} dx = 0.$$

**Le théorème de convergence dominée est le plus puissant des théorèmes d'interversion somme-intégrale (et aussi le plus difficile à démontrer). Il est indispensable de savoir parfaitement s'en servir!**

**Méthode.** Pour appliquer le théorème de convergence dominée afin de déterminer  $\int_{\Omega} f_n(x) dx$ , on doit :

1. Trouver la fonction  $f$  vers laquelle  $(f_n)$  converge simplement.
2. Trouver une quantité  $g(x)$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|f_n(x)| \leq g(x)$ . Attention, il ne faut pas que  $g(x)$  dépende de  $n$ !
3. Vérifier que  $g$  est bien intégrable, c'est-à-dire que  $\int_{\Omega} g(x) dx < +\infty$ .

**Remarque 5.2.** En pratique :

- Comme la valeur d'une intégrale ne dépend pas de la valeur de l'intégrande en un point, il suffit que  $f_n(x)$  converge vers  $f(x)$  pour tous les  $x \in \Omega$  sauf un.
- Comme on calcule une limite, on ne s'intéresse qu'au comportement pour  $n$  grand. Par conséquent, il suffit de trouver une fonction  $g$  positive et intégrable telle que pour tout  $n$  assez grand, on a  $|f_n(x)| \leq g(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ .

**Exemple 5.10.** Déterminons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ .

Pour tout  $t \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ , on a  $\frac{1}{(1+t^2)^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . D'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in [-1, 1]$ , on a  $\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq 1$ , qui est bien intégrable sur  $[-1, 1]$ . On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} = 0.$$

**Exemple 5.11.** Déterminons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \sin(x) \frac{e^{-\frac{x}{n+1}}}{1+x^n} dx$ .

Remarquons que, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \sin(x) \frac{e^{-\frac{x}{n+1}}}{1+x^n} dx$  est bien définie, car  $\left| \sin(x) \frac{e^{-\frac{x}{n+1}}}{1+x^n} \right| \leq e^{-\frac{x}{n+1}}$ , qui est bien intégrable sur  $[1, +\infty[$  [par le critère de Riemann].

Pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ , on a

$$\sin(x) \frac{e^{-\frac{x}{n+1}}}{1+x^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Pour tout  $n \geq 2$  et tout  $x \in [1, +\infty[$ , on a

$$\left| \sin(x) \frac{e^{-\frac{x}{n+1}}}{1+x^n} \right| \leq \frac{1}{1+x^n} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Cette quantité est bien indépendante de  $n$ , et la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  est intégrable par le critère de Riemann.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \sin(x) \frac{e^{-\frac{x}{n+1}}}{1+x^n} dx = 0.$$

Le théorème de convergence dominée permet de donner un critère simple pour qu'une suite de fonctions converge dans  $L^p$ .

**Corollaire 5.1.** Soit  $p \in [1, +\infty[$ , et soit  $(f_n) \in L^p(\Omega)$  une suite convergeant simplement vers  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $g \in L^p(\Omega)$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \Omega$ , on a  $|f_n(x)| \leq g(x)$ . Alors  $f \in L^p(\Omega)$ , et la suite  $(f_n)$  converge vers  $f$  dans  $L^p$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite  $(f_n^p)_n$ , qui convergent simplement vers  $f^p$ . □

# Chapitre 6

## Intégrales à paramètres et transformée de Fourier

Dans ce chapitre, on s'intéressera à des fonctions pouvant s'écrire sous la forme d'une intégrale dépendant d'un paramètre. Par exemple, on considèrera des fonctions de la forme

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy.$$

On donnera dans un premier temps des conditions sur  $f$  permettant d'affirmer que  $F$  est continue, ou même dérivable. On s'intéressera ensuite au cas particulier où  $f(x, y) = g(y)e^{ixy}$  : on dit alors que  $F$  est la transformée de Fourier de  $g$ . La transformée de Fourier, qui permet de décrire une fonction en terme de ses oscillations, est un outil essentiel pour les équations aux dérivées partielles, mais aussi en théorie du signal, en probabilités...

### 6.1 Intégrales à paramètres

Dans toute cette section,  $\Omega$  sera une partie de  $\mathbb{R}^d$ , et  $\Omega'$  sera une partie de  $\mathbb{R}^{d'}$ . On considèrera une fonction  $f : \Omega \times \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ . On aimerait définir une fonction  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$F(x) := \int_{\Omega'} f(x, y) dy.$$

Une telle quantité est appelée une *intégrale à paramètre* : il s'agit d'une intégrale sur  $\Omega'$  dépendant d'un paramètre  $x \in \Omega$ .

Nous allons maintenant voir des critères permettant d'affirmer que  $F$  est bien définie, est continue, voire même dérivable.

**Théorème 6.1** (Continuité des intégrales à paramètre). *On suppose que*

- Pour tout  $y \in \Omega'$ , la fonction  $x \mapsto f(x, y)$  est continue.
- Il existe une fonction  $g : \Omega' \rightarrow [0, +\infty[$  telle que, pour tout  $x \in \Omega$ , on a  $|f(x, y)| \leq g(y)$ , et telle que  $\int_{\Omega'} g(y) dy < +\infty$ .

Alors la fonction  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  donnée par  $F(x) := \int_{\Omega'} f(x, y) dy$  est bien définie, et est continue.

*Démonstration.* Pour chaque  $x \in \Omega$ , le fait que  $|f(x, y)| \leq g(y)$  qui est intégrable nous assure que  $\int_{\Omega'} |f(x, y)| dy < +\infty$ , et donc que  $\int_{\Omega'} f(x, y) dy$  est bien définie. Ainsi, la fonction  $F$  est bien définie sur  $\Omega$ .

Fixons  $x \in \Omega$ . Pour montrer que  $F$  est continue au point  $x$ , il faut montrer que, si  $(x_n)$  est une suite convergente vers  $x$ , on a  $F(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(x)$ . Pour cela, nous allons utiliser le théorème de convergence dominée.

Notons  $f_n(y) := f(x_n, y)$ . Pour chaque  $y \in \Omega'$ , on sait que  $x \mapsto f(x, y)$  est continue, donc, comme  $x_n$  converge vers  $x$ , la suite  $(f(x_n, y))_n$  converge vers  $f(x, y)$ . Autrement dit, la suite  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $y \mapsto f(x, y)$ .

Pour tout  $n$ , on sait par hypothèse que  $|f_n(y)| \leq g(y)$ , qui est bien intégrable sur  $\Omega'$ . Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée sont donc réunies, et on peut en déduire que

$$\int_{\Omega'} f(x_n, y) dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega'} f(x, y) dy.$$



Autrement dit, on a  $F(x_n) \rightarrow F(x)$ . Ceci étant vrai pour toute suite  $(x_n)$  convergeant vers  $x$ , on en déduit que  $F$  est continue en  $x$ . Ceci étant vrai pour tout  $x \in \Omega$ , la fonction  $F$  est bien continue sur  $\Omega$ .  $\square$

**Théorème 6.2** (Dérivabilité des intégrales à paramètre). *Soit  $I$  un intervalle réel, et soit  $f : I \times \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction telle que*

1. *Pour tout  $t \in I$ ,  $\int_{\Omega'} |f(t, y)| dy < +\infty$ .*
2. *Pour tout  $y \in \Omega'$ , la fonction  $t \mapsto f(t, y)$  est  $C^1$ .*
3. *Il existe  $g : \Omega' \rightarrow [0, +\infty]$  telle que pour tout  $t \in I$  et tout  $y \in \Omega'$ , on a  $|\frac{\partial f(t, y)}{\partial t}| \leq g(y)$ , et telle que  $g$  est intégrable sur  $\Omega'$ .*

*Alors la fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{C}$  donnée par  $F(t) = \int_{\Omega'} f(t, y) dy$  est  $C^1$ , et sa dérivée est donnée par*

$$F'(t) = \int_{\Omega'} \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy.$$

*Démonstration.* Notons  $H(t) = \int_{\Omega'} \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy$ , qui est bien définie par hypothèse. On déduit du théorème précédent que  $H$  est continue. Nous allons montrer que, pour tout  $a < b \in I$ , on a  $F(b) - F(a) = \int_a^b H(t) dt$ . Ceci permettra bien de conclure que  $F$  est  $C^1$  avec  $F' = H$ .

On a

$$\int_a^b \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} \right| dy dt \leq \int_a^b \int_{\Omega'} g(y) dy dt = (b - a) \int_{\Omega'} g(y) dy < +\infty.$$

On a donc le droit d'utiliser le théorème de Fubini pour déduire que

$$\begin{aligned} \int_a^b H(t) dt &= \int_a^b \int_{\Omega'} \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dy dt \\ &= \int_{\Omega'} \int_a^b \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} dt dy \\ &= \int_{\Omega'} [f(b, y) - f(a, y)] dy \\ &= \int_{\Omega'} f(b, y) dy - \int_{\Omega'} f(a, y) dy = F(b) - F(a), \end{aligned}$$

comme annoncé.  $\square$

**Exemple 6.1.** *Pour  $x > 0$ , on pose  $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-yx} - e^{-y}}{y} dy$ . Nous allons montrer que  $G$  est bien définie et est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , calculer  $G'(x)$ , et en déduire la valeur de  $G(x)$ .*

*Notons  $g(x, y) = \frac{e^{-yx} - e^{-y}}{y}$ . Pour chaque  $x > 0$ ,  $y \mapsto g(x, y)$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , et  $g(x, y) \underset{y \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{-yx + y}{y} = (1 - x)$ . D'autre part, pour chaque  $x > 0$ , on a  $y^2 g(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0$  par croissance comparée. Par le critère de Riemann,  $G$  est bien définie pour tout  $x > 0$ .*

*L'application  $x \mapsto g(x, y)$  est dérivable, et on a  $\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{-ye^{-yx}}{y} = -e^{-yx}$ . Pour tout  $x_0 > 0$ , on a pour tout  $x \geq x_0$  que  $|-e^{-yx}| \leq e^{-yx_0}$ , qui est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . L'application  $G$  est donc de classe  $C^1$  sur  $[x_0, +\infty[$  pour tout  $x_0 > 0$ . L'application  $G$  est donc de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ . Sa dérivée vaut*

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-yx} dy = \left[ \frac{e^{-yx}}{x} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{x}.$$

*La fonction  $G$  est une primitive de  $-\frac{1}{x}$ , et  $G(1) = 0$ , donc  $G(x) = -\ln x$ .*

## 6.2 Transformée de Fourier

### 6.2.1 Définition et exemples

**Définition 6.1.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Sa transformée de Fourier, notée  $\widehat{f}$  ou  $\mathcal{F}(f)$  est la fonction de  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  donnée par

$$(\mathcal{F}(f))(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) \, dx.$$

Ici,  $x \cdot \xi$  est le produit scalaire entre  $x$  et  $\xi$ , c'est-à-dire que si  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  et  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ , on note

$$x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_d \xi_d.$$

Si vous n'êtes pas à l'aise avec la notion de produit scalaire ou avec les intégrales multiples, n'hésitez pas à lire ce chapitre une première fois en ne considérant que le cas où  $d = 1$ , et donc  $x \cdot \xi = x\xi$  : vous ne passerez à côté d'aucune idée importante!

**Remarque 6.1.** Certains auteurs préfèrent définir la transformée de Fourier par  $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) \, dx$ , ou par  $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2i\pi x \cdot \xi} f(x) \, dx$ . Fondamentalement, ça ne change pas grand chose!

**Exemple 6.2.** Sur  $\mathbb{R}$ , considérons la fonction donnée par  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Cette fonction est bien dans  $L^1(\mathbb{R})$ .

Calculons sa transformée de Fourier. Si  $\xi \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{\xi\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{i} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi}. \end{aligned}$$

**Exemple 6.3.** Sur  $\mathbb{R}$ , considérons la fonction  $f$  donnée par  $f(x) = e^{-|x|}$ . Cette fonction est bien continue, et elle est intégrable, grâce au critère de Riemann (Proposition 2.1). Calculons sa transformée de Fourier. Soit  $\xi \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|-ix\xi} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x-ix\xi} \, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{x-ix\xi} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-x-ix\xi}}{-1-i\xi} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{x-ix\xi}}{1-i\xi} \right]_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+|\xi|^2}. \end{aligned}$$

## 6.2.2 Propriétés élémentaires

**Lemme 6.1.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ .

- Si  $a \in \mathbb{R}^d$ , la fonction  $g_a : x \mapsto f(x + a)$  a pour transformée de Fourier  $\widehat{g_a}(\xi) = e^{ia\xi} \widehat{f}(\xi)$
- Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la fonction  $h_\lambda : x \mapsto f(\lambda x)$  a pour transformée de Fourier  $\widehat{h_\lambda}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$ .

Enfin, notons que la transformée de Fourier est linéaire : si  $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$  et  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ , on a

$$\mathcal{F}(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2) = \mu_1 \mathcal{F}(f_1) + \mu_2 \mathcal{F}(f_2).$$

Ces propriétés se prouvent facilement à l'aide d'un changement de variables, ou en utilisant la linéarité de l'intégrale. Les détails de la preuve sont laissés en exercice.

Voyons maintenant quelques propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction  $L^1$ .

**Lemme 6.2.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . La fonction  $\widehat{f}$  est continue, et est bornée sur  $\mathbb{R}^d$ , avec

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-d/2} \|f\|_1.$$

*Démonstration.* Le fait que  $\widehat{f}$  est bornée est immédiat : pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , on a

$$|\widehat{f}(\xi)| = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-ix \cdot \xi} f(x)| \, dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, dx = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f\|_{L^1}.$$

Pour montrer que  $f$  est continue, on va utiliser le théorème 6.1. Notons  $h(x, \xi) := e^{-ix \cdot \xi} f(x)$ . Pour chaque  $x \in \mathbb{R}^d$ , cette fonction est continue en  $\xi$ . On a  $|h(x, \xi)| \leq f(x)$ , qui est indépendante de  $\xi$ , et est intégrable sur  $\mathbb{R}^d$ .

Toutes les conditions du théorème 6.1 sont bien vérifiées, et on peut donc en déduire que  $\widehat{f}$  est continue.  $\square$

## 6.2.3 Transformée de Fourier et dérivation

L'un des intérêts majeurs de la transformée de Fourier est qu'elle transforme les dérivations en produits par des polynômes, et réciproquement. Commençons par énoncer ce résultat en dimension  $d = 1$ .

### Le cas unidimensionnel

**Théorème 6.3.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

1. Si  $f \in C^1(\mathbb{R})$  avec  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ , alors on a

$$(\mathcal{F}(f'))(\xi) = i\xi(\mathcal{F}(f))(\xi).$$

2. Si  $x \mapsto xf(x)$  appartient à  $L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\mathcal{F}(f)$  est  $C^1$ , et on a

$$(\mathcal{F}(f))'(\xi) = -i(\mathcal{F}(xf))(\xi).$$

*Démonstration.* 1. Nous admettons le fait que, si  $f$  est une fonction dans  $L^1(\mathbb{R})$  qui est dérivable, et vérifie  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ .

On a envie d'utiliser la formule d'intégration par parties. Pour appliquer cette formule, il faut toujours calculer les intégrales sur  $[-A, A]$ , puis faire tendre  $A$  vers  $+\infty$ . On a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A f'(x) e^{-ix\xi} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f(x) e^{-ix\xi}]_{-A}^A - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^A f(x) \times (-i\xi) e^{-ix\xi} \, dx.$$

Quand on fait tendre  $A$  vers  $+\infty$ , le membre de gauche converge vers  $(\mathcal{F}(f'))(\xi)$ . Le premier terme du membre de droite tend vers zéro par l'hypothèse qu'on a faite, et le deuxième terme tend vers  $i\xi(\mathcal{F}(f))(\xi)$ . On en déduit bien le résultat.

2. On note  $h(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} f(x)$ , de sorte que  $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} h(x, \xi) dx$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\xi \mapsto h(x, \xi) \in C^1$ , et  $\left| \frac{\partial h(x, \xi)}{\partial \xi} \right| = |-ixe^{-ix\xi} f(x)| = |xf(x)|$ . Cette quantité est indépendante de  $\xi$ , et est intégrable, par hypothèse. On peut donc appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre pour déduire que  $\widehat{f}(\xi)$  est  $C^1$ , et

$$(\mathcal{F}(f))'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h(x, \xi)}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix) e^{-ix\xi} f(x) dx = -i(\mathcal{F}(xf))(\xi).$$

□

**Exemple 6.4** (Transformée de Fourier de la Gaussienne). On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x^2}$ . Par le critère de Riemann, cette fonction est bien dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Pour calculer sa transformée de Fourier, nous allons montrer qu'elle est solution d'une équation différentielle simple.

Remarquons que  $f$  est  $C^1$ , et vérifie

$$f'(x) = -2xf(x). \quad (6.1)$$

On a  $x^2 \times |xe^{-x^2}| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  par croissance comparée. Le critère de Riemann nous assure donc que  $x \mapsto xe^{-x^2}$  appartient à  $L^1(\mathbb{R})$ . Ainsi, les fonctions apparaissant de part et d'autre de l'équation (6.1) sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ , et doivent donc avoir la même transformée de Fourier.

Par le point 1. du théorème précédent, on sait que  $\widehat{f}'(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$ . D'autre part, par le second point, on a  $\widehat{(2xf(x))}(\xi) = 2i\xi \widehat{f}(\xi)$ .

Par conséquent, on déduit que

$$\widehat{f}'(\xi) = -\frac{\xi}{2} \widehat{f}(\xi).$$

En résolvant cette équation différentielle, on trouve

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(0) e^{-\xi^2/4}.$$

On sait que  $\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , par l'exemple 3.5. Finalement, on a

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\xi^2/4}.$$

**Lemme 6.3** (Lemme de Riemann-Lebesgue). Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ . On a

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

*Démonstration.* Nous ne donnerons la preuve que dans le cas où  $f$  est  $C^1$  avec  $f' \in L^1$ . On a alors

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi') \times \frac{1}{i\xi}.$$

Mais, par le lemme 6.2,  $\widehat{f}(\xi')$  est bornée indépendamment de  $\xi$ . le membre de droite tend donc bien vers  $+\infty$  quand  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . □

**Remarque 6.2.** D'habitude, quand on a une intégrale à paramètre de la forme  $F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \xi) dx$  et qu'on veut montrer qu'elle tend vers zéro quand  $\xi \rightarrow \infty$ , une bonne stratégie est de montrer que  $f(x, \xi)$  tend vers zéro quand  $\xi \rightarrow \infty$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et on cherche à appliquer le théorème de convergence dominée.

Ici, c'est un phénomène complètement différent qui se produit : ce sont des compensations entre les morceaux positifs et négatifs de l'intégrale qui rendent  $\widehat{f}(\xi)$  petite quand  $\xi$  est grand, comme expliqué dans la figure 6.1.

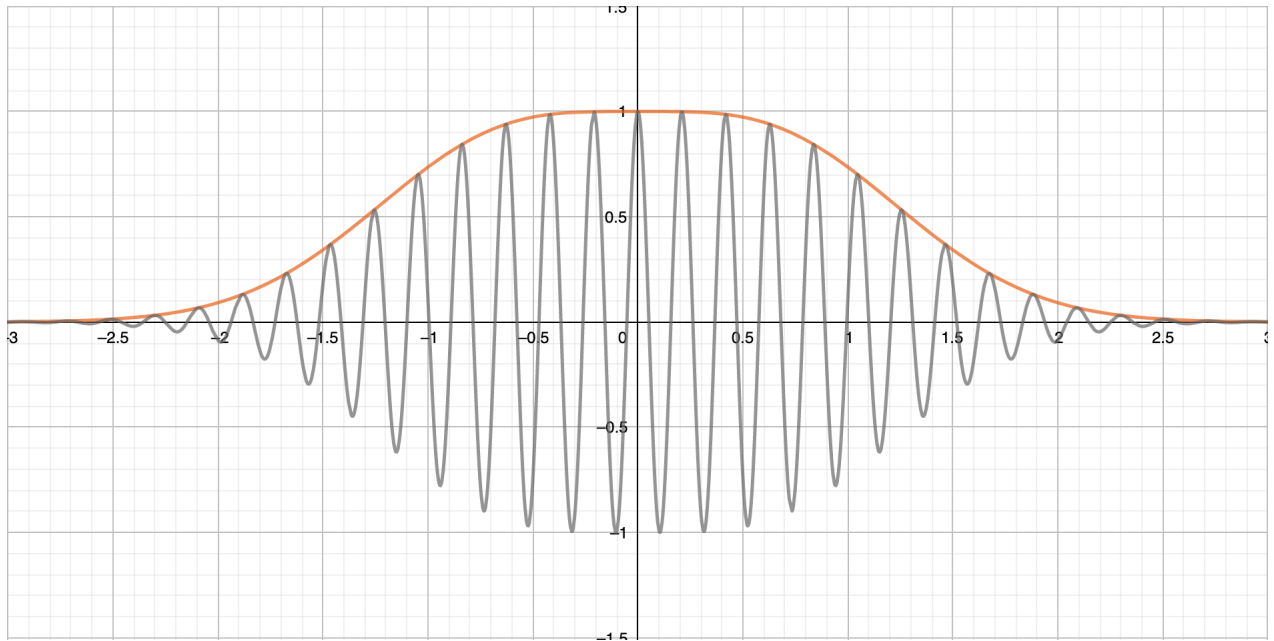


FIGURE 6.1 – Une fonction  $f$  à valeurs réelles, et la partie réelle de  $f(x)e^{-ix\xi}$ , c'est-à-dire  $f(x)\cos(x\xi)$  pour  $\xi = 30$ . On voit que  $f(x)e^{-ix\xi}$  oscille très rapidement. Ainsi, quand on l'intègre, les parties positives et négatives tendent à se compenser, et  $\widehat{f}(\xi)$  sera petite.

### Le cas multidimensionnel

Si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$  et  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ , on note  $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$ ,  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$  et

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Le théorème suivant est un analogue du théorème 6.3 lorsque  $d \geq 1$ , et aussi lorsqu'on considère plus d'une dérivée.

**Théorème 6.4.** Soient  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

1. Si  $|x|^k f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , alors  $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^d)$  et, pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  tel que  $0 \leq |\alpha| \leq k$ , on a

$$\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f(\xi)}.$$

2. Si  $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$  est telle que  $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  tel que  $0 \leq |\alpha| \leq k$ . Alors, pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  tel que  $0 \leq |\alpha| \leq k$ , on a

$$\widehat{\partial^\alpha f(\xi)} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

La preuve de ce théorème, qui est analogue à celle du théorème 6.3 (mais comporte quelques subtilités) est admise.

### 6.2.4 Transformée de Fourier inverse et formule de Plancherel

Pour  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ , on note  $f^\vee : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  sa transformée de Fourier inverse définie par

$$f^\vee(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} f(x) dx. \quad (6.2)$$

**Théorème 6.5.** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$  et  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$  alors  $f(x) = (\widehat{f})^\vee(x)$  et  $\widehat{f(x)} = \widehat{(\widehat{f}^\vee)}(x)$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^d$ . En particulier, dans ce cas,  $f$  est continu, bornée et tend vers 0 à l'infini.

Ainsi, si on connaît la transformée de Fourier de  $f$ , on peut retrouver  $f$  très facilement, en appliquant la formule (6.2). Remarquons que la formule donnant  $f^\vee$  est presque la même que celle donnant  $\widehat{f}$  : on a  $f^\vee(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ .

Autrement dit, si on part d'une fonction  $f$  et qu'on prend la transformée de Fourier de sa transformée de Fourier, on obtient la fonction  $x \mapsto f(-x)$ !

**Exemple 6.5.** On définit la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Déterminons sa transformée de Fourier. Remarquons que calculer directement  $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ix\xi}}{1+x^2} dx$  n'est pas si facile que ça.

Heureusement, on a trouvé dans l'exemple 6.3 que, si on note  $f(x) = e^{-|x|}$ , on a

$$\mathcal{F}(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} g.$$

En prenant la transformée de Fourier de chaque membre de cette égalité, on obtient  $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}(g)$ . Mais, par le théorème 6.5, on sait que  $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$ . Or  $f(-x) = f(x)$ , car  $f$  est paire. On en déduit donc que  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{F}(g) = f$ . Ainsi,

$$(\mathcal{F}(g))(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\xi|}.$$

Pour finir ce chapitre, nous allons donner une jolie formule concernant la transformée de Fourier d'une fonction qui est à la fois dans  $L^1$  et dans  $L^2$ . Rappelons que,  $\mathbb{R}^d$  n'étant pas de volume fini, le fait d'être dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  n'implique pas d'être dans  $L^1(\mathbb{R}^d)$ , et la réciproque n'est pas vraie non plus : ce sont deux propriétés indépendantes.

**Théorème 6.6** (Formules de Plancherel et de Parseval). Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ . Alors  $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , et on a la formule de Plancherel :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx. \quad (6.3)$$

Plus généralement, si  $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ , alors on a la formule de Parseval :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Autrement dit, on a

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \|\widehat{f}\|_2 \\ \langle f, g \rangle &= \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle. \end{aligned}$$

Démonstration. Admis. □

# Chapitre 7

## Séries de Fourier

Dans tout ce chapitre, on considérera des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  qui sont  $2\pi$ -périodiques, c'est-à-dire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x + 2\pi) = f(x)$ .

Les exemples les plus simples de fonctions  $2\pi$ -périodiques sont les *polynômes trigonométriques*, de la forme

$$\sum_{k=-n}^n c_n e^{inx}.$$

Chacune des fonctions  $x \mapsto e^{inx}$  étant  $2\pi$ -périodique, la fonction ci-dessus est bien  $2\pi$ -périodique.

Le but de ce chapitre est de comprendre pourquoi toute fonction  $2\pi$ -périodique suffisamment régulière peut être approchée par des polynômes trigonométriques. On a même mieux : une fonction  $2\pi$ -périodique suffisamment régulière peut toujours s'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}. \quad (7.1)$$

Nous allons maintenant expliquer comment calculer les coefficients  $c_n(f)$  apparaissant dans (7.1), et en quel sens la série apparaissant dans (7.1) converge.

### 7.1 Les coefficients de Fourier et leur propriétés

**Définition 7.1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue par morceaux et  $2\pi$ -périodique. Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on définit le  $n^{\text{ième}}$  coefficient de Fourier complexe de  $f$ , noté  $c_n(f)$ , par

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

**Exemple 7.1.** Soit  $k \in \mathbb{Z}$ , et soit  $e_k(x) = e^{ikx}$ . Calculons les coefficients de Fourier de  $e_k$ .

Commençons par le coefficient  $c_k(e_k)$ . On a

$$c_k(e_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1.$$

D'autre part, si  $n \neq k$ , on a

$$\begin{aligned} c_n(e_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{i(k-n)t}}{k-n} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi(k-n)} \left( e^{2i\pi(k-n)} - 1 \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, tous les coefficients de Fourier de  $e_k$  sont nuls, sauf le  $k^{\text{ième}}$ , qui vaut 1. Ce résultat est à retenir!

**Exemple 7.2.** Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique valant 1 sur  $[0, \pi[$ , et valant 0 sur  $[\pi, 2\pi[$ . Calculons les coefficients de Fourier de  $f$ .

Si  $n = 0$ , on a

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi dt = \frac{1}{2}.$$

Si  $n \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^\pi \\ &= \frac{i}{2n\pi} ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} -\frac{i}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \end{aligned}$$

**Remarque 7.1.** Si  $f$  est  $2\pi$ -périodique, alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , la fonction  $t \mapsto f(t)e^{-int}$  est aussi  $2\pi$ -périodique. Par conséquent, plutôt que de calculer son intégrale de 0 à  $2\pi$ , on peut calculer son intégrale sur n'importe quel intervalle de longueur  $2\pi$  : ça donnera toujours la même valeur.

**Remarque 7.2.** On a  $c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$ , qui est donc la moyenne de  $f$ .

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on définit la  $N^{\text{ième}}$  somme de Fourier de  $f$  par

$$(S_N(f))(x) := \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}.$$

L'un des enjeux majeurs du chapitre sera de montrer que  $S_N(f)$  converge vers  $f$ , et de préciser en quel sens cette convergence a lieu.

### 7.1.1 Coefficients de Fourier réels

Lorsque la fonction  $f$  est à valeurs réelles, il n'est pas très naturel de la représenter à l'aide des fonctions complexes  $e^{inx}$ . On définit alors les *coefficients de Fourier réels* de  $f$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par<sup>1</sup>

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Remarquons qu'on a alors toujours  $b_0(f) = 0$ .

En se rappelant que  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  et  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ , on peut montrer que

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) (e^{int} + e^{-int}) dt = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} f(t) (e^{int} - e^{-int}) dt = i(c_n(f) - c_{-n}(f)), \end{aligned} \tag{7.2}$$

et, inversement,

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{si } n \geq 0 \\ \frac{a_n + ib_n}{2} & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

On montre que, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , la somme  $S_N(f)$  peut se réécrire comme

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)).$$

1. Attention, certains auteurs prennent une autre convention pour  $a_0(f)$ .



**Exemple 7.3.** Reprenons la fonction  $f$  de l'exemple 7.2, et calculons ses coefficients de Fourier réels.

On a

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dt = 1,$$

tandis que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi = 0$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{-1}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Notons que l'on aurait pu retrouver ces valeurs en utilisant (7.2).

La  $(2N+1)$ ième somme de Fourier de  $f$  s'écrit donc (voir figure 7.1).

$$(S_{2N+1}(f))(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^N \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x).$$

## 7.1.2 Propriétés de coefficients de Fourier

Les propriétés suivantes peuvent parfois être utiles pour simplifier les calculs. Leur preuve est laissée en exercice.

**Lemme 7.1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. L'application  $f \mapsto c_n(f)$  est linéaire.
2.  $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ .
3.  $c_n(\tilde{f}) = c_{-n}(f)$  où  $\tilde{f}(t) := f(-t)$ .

Le lemme suivant, en revanche, est fondamental.

**Lemme 7.2.** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique et  $C^1$  par morceaux. Les coefficients de Fourier de  $f'$  sont alors donnés par

$$c_n(f') = inc_n(f).$$

*Démonstration.* Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} [f(t) e^{-int}]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \times (-in) e^{-int} dt \quad \text{par intégration par parties}$$

$$= inc_n(f),$$

le terme entre crochet étant nul, car  $t \mapsto f(t) e^{-int}$  est  $2\pi$ -périodique □

## 7.2 Convergence des séries de Fourier

### 7.2.1 Convergence ponctuelle

**Définition 7.2.** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique. On dit que  $f$  est  $C^1$  par morceaux s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_1 < \dots < a_n \in [0, 2\pi[$  tels que, en prenant  $a_{n+1} := a_1 + 2\pi$ , la fonction  $f$  est  $C^1$  sur  $]a_i; a_{i+1}[$  et  $f|_{]a_i; a_{i+1}[}$  est prolongeable en une fonction  $C^1$  sur  $[a_i; a_{i+1}]$ .

**Remarque 7.3.** Si  $f$  est  $C^1$  par morceaux, alors sa dérivée  $f'$  est continue par morceaux.

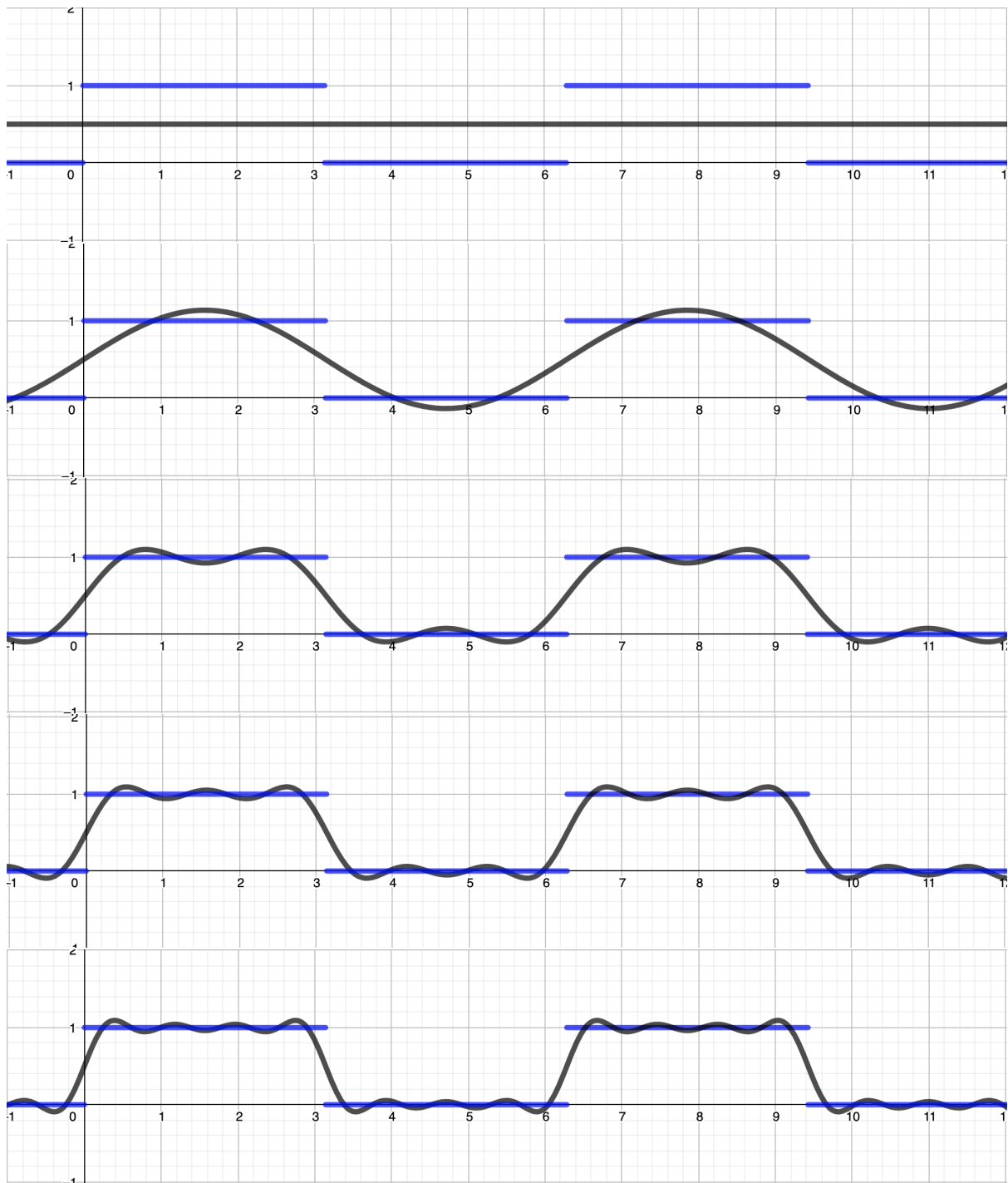


FIGURE 7.1 – La fonction  $f$  en bleu, et ses premières sommes de Fourier.

Si  $f$  est  $C^1$  par morceaux (ou même, si  $f$  est continue par morceaux), alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les limites  $f(x^\pm) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x \pm \varepsilon)$  existent. Lorsque  $f$  est continue en  $x$ , alors ces limites sont égales, et on a  $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$ .

Le théorème suivant nous assure que, lorsque  $f$  est  $C^1$  par morceaux, alors la suite  $S_N(f)(x)$  est convergente pour tout  $x$ .

**Théorème 7.1** (Théorème de Dirichlet). Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, qui est  $C^1$  par morceaux. Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (S_N(f))(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

En particulier, si  $f$  est continue en  $x$ , on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (S_N(f))(x) = f(x).$$

*Démonstration.* Admis. □

**Exemple 7.4.** Reprenons l'exemple 7.2. La fonction  $f$  est continue partout, sauf en les points de la forme  $n\pi$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ , on a

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)x).$$

En particulier, pour  $x = \frac{\pi}{2}$ , on a

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Mais, comme  $\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$ , on a  $\frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \times (-1)^k$ . Autrement dit

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Cette jolie formule est très utile pour calculer numériquement la valeur de  $\pi$ .

Appliquons maintenant le théorème de Dirichlet en  $x = 0$ . On a

$$(S_N(f))(0) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^N \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)0) = \frac{1}{2},$$

les sinus étant tous nuls. D'autre part, on a  $f(0^+) = 1$ , et  $f(0^-) = 0$ , donc  $S_N(f)(0)$  converge bien vers  $\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2}$ , comme annoncé par le théorème de Dirichlet.

Lorsque  $f$  est  $C^1$  par morceaux, et est continue, alors on a un résultat plus précis.

**Théorème 7.2.** Soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique, qui est  $C^1$  par morceaux et continue. Alors la suite  $(S_N(f))$  converge vers  $f$  uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Pour simplifier, nous donnerons la preuve uniquement dans le cas où la fonction  $f$  est  $C^2$  et  $2\pi$ -périodique.

Par le Théorème 7.1, on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(f)e^{-inx}.$$

Il s'agit donc de montrer que  $(f - S_N(f))$  converge uniformément vers zéro, en se rappelant que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) - S_N(f)(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} c_{-n}(f)e^{-inx}.$$

La fonction  $f''$  est alors  $2\pi$ -périodique et continue. En particulier, elle est bornée : notons  $M > 0$  un nombre tel que  $|f''(x)| \leq M$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a alors

$$|c_n(f'')| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)| |e^{-int}| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M dt = M.$$

D'autre part, en appliquant deux fois le lemme 7.2, on a  $c_n(f'') = -n^2 c_n(f)$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , on a

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f'')|}{n^2} \leq \frac{M}{n^2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} |f(x) - (S_N(f))(x)| &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |c_n(f)e^{inx}| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |c_{-n}(f)e^{-inx}| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M}{n^2} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M}{n^2}. \end{aligned}$$

Cette quantité est indépendante de  $x$ , et elle tend vers zéro quand  $N \rightarrow +\infty$ , car il s'agit du reste d'une série convergente. On a donc bien montré que  $(S_N)$  converge uniformément vers  $f$ .  $\square$

### 7.2.2 Convergence $L^2$

Après le théorème 7.1 nous donnant la convergence simple des séries de Fourier lorsque  $f$  est continue, et le théorème 7.2 nous donne la convergence uniforme lorsque la fonction  $f$  est plus régulière. Nous allons voir un dernier résultat, donnant la convergence des séries de Fourier au sens  $L^2$ . Ce genre de résultat est plus difficile à manipuler, mais a l'avantage de marcher pour toutes les fonctions  $f$  dans  $L^2$ !

**Théorème 7.3** (Théorème de Parseval). *Soit  $f \in L^2(]0, 2\pi[)$ . Alors la suite de fonction  $(S_N(f))$  converge vers  $f$  dans  $L^2(]0, 2\pi[)$ . En particulier, on a l'égalité de Parseval :*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2). \quad (7.3)$$

*Démonstration.* Admis  $\square$

Le terme de droite dans (7.3) est souvent noté  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ . Lorsque  $f$  est à valeurs réelles, il est parfois utile de réécrire (7.3) comme

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$

**Exemple 7.5.** Reprenons l'exemple 7.2. On a vu que  $a_0(f) = 1$ , et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $a_n(f) = 0$ , tandis que

$$b_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a donc

$$\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1, n \text{ impair}} \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi dt = \frac{1}{2}.$$

On déduit donc de la formule de Parseval que

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Pour la culture.** Pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$ , notons  $e_n(x) := e^{inx}$ . On a alors  $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$ , où  $\langle f, e_n \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$  est analogue au produit scalaire défini dans la section 4.3. La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est alors une famille orthonormale pour ce produit scalaire : c'est-à-dire que  $\langle e_n, e_m \rangle = 0$  si  $n \neq m$ , et  $\langle e_n, e_n \rangle = 1$ . Pour toute fonction  $f \in L^2(]0, 2\pi[)$ , le théorème de Parseval nous dit que  $f$  est la limite dans  $L^2$  de  $\sum_{n=-N}^N \langle f, e_n \rangle e_n$ . Ceci est souvent noté

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle e_n. \quad (7.4)$$

Ainsi, la famille est  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  peut être vue comme une base orthonormale de  $L^2(]0, 2\pi[)$  (en dimension infinie, on parle plutôt de base hilbertienne).

En prenant le produit scalaire de l'égalité ci-dessus avec  $f$ , le membre de gauche donne  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ , tandis que le membre de droite donne  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle \times \langle e_n, f \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ . On retrouve donc bien la formule 7.3.

### 7.3 Coefficients de Fourier de fonctions qui ne sont pas $2\pi$ -périodiques

Dans tout ce chapitre, on a considéré des fonctions  $2\pi$ -périodiques. Bien entendu, toutes les fonctions ne sont pas  $2\pi$ -périodiques ! Heureusement, la théorie des séries de Fourier s'adapte facilement au cas de fonctions plus générales.

Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est  $T$ -périodique, c'est-à-dire, si  $f(t + T) = f(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , alors on définit ses coefficients de Fourier complexes par

$$c_n(f) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi n x/T} dx.$$

Les sommes à série de Fourier associée à  $f$  sont alors définies par

$$(S_N(f))(x) := \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{\frac{2i\pi n x}{T}}.$$

Tous les résultats de ce chapitre se généralisent naturellement au cas où  $T \neq 2\pi$ .

**Pour la culture.** Un son est une perturbation locale de la pression de l'air (ou de l'eau). Lorsqu'on l'entend, cela engendre une vibration du tympan. Si cette perturbation n'est pas périodique, ce son est un bruit, tandis que, si elle est périodique, c'est une note de musique. La période de la note correspond alors à sa hauteur (le fait d'être grave ou aiguë). Une note de musique étant un signal périodique, on peut la décomposer en série de Fourier. Les différents coefficients de Fourier donnent le timbre d'un instrument : c'est ce qui fait qu'un *Do* joué au violon ne sera pas le même qu'un *Do* joué à la trompette.