

# Convection de Bénard-Rayleigh. Cas libre-libre Bénard-Rayleigh convection in the free-free case

G.Iooss

Laboratoire J.A.Dieudonné, I.U.F., Université Côte d'Azur,  
CNRS, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France  
iooss.gerard@orange.fr

## Résumé

La convection de Bénard-Rayleigh est étudiée dans le cas des conditions aux limites libre-libre, qui a l'avantage de permettre des calculs explicites. On présente les solutions convectives bifurquées périodiques sur réseau hexagonal, lorsque le nombre de Rayleigh est voisin de sa valeur critique. On donne explicitement les plages de valeurs du nombre de Prandtl déterminant la stabilité ou non de chaque solution bifurquée : rouleaux, pattern hexagonal, pattern en triangles équilatéraux, et patchwork. On montre que lorsqu'une de ces solutions est stable, c'est soit les rouleaux, soit le pattern en triangles.

Bénard - Rayleigh convection is investigated in the case of free-free plane boundaries. This has the advantage to allow explicit computations. Convective steady periodic bifurcating solutions are presented on a hexagonal lattice, for a Rayleigh number near its critical value. Explicit intervals of values of the Prandtl number are given for which bifurcating solutions are stable or not (rolls, hexagons, triangular pattern and patchwork). It is shown that when one of these solutions is stable, it can only be rolls or a triangular pattern.

## 1 Le Problème hydrodynamique

Soit un fluide visqueux remplissant la région située entre deux plans horizontaux. Chaque frontière plane est supposée être une "frontière libre" . De plus, on suppose les plans inférieur et supérieur respectivement à des températures  $T_0$  et  $T_1$ , avec  $T_0 > T_1$ . La différence de température entre les deux plans modifie la densité du fluide, ayant tendance à placer le fluide plus léger au dessus du fluide plus lourd. La gravité intervient par la poussée d'Archimède, qui induit une instabilité du "régime de conduction" où le fluide est au repos, alors que la température dépend linéairement de la coordonnée verticale  $z$ . La viscosité  $\nu$  empêche l'instabilité de se manifester jusqu'à une valeur critique de la différence de température, en deçà de laquelle rien ne se passe, et au delà de laquelle "le régime convectif" apparaît, comme une "bifurcation" des solutions stationnaires d'un certain système. Ce phénomène a fasciné un grand nombre de physiciens depuis plus d'un siècle, une bibliographie assez fournie se trouve par exemple dans [4]. Nous nous intéressons ici au problème mathématique de cette bifurcation. On doit citer les travaux de V.Yudovich [9], [10], [11], [12], puis ceux de D.Sattinger [7] et plus récemment l'ouvrage de M.Golubitsky et al [1] qui traite le problème sous l'angle pattern - rupture de symétrie, par la méthode de Lyapounov-Schmidt.

Les conditions aux limites de "surfaces libres" (en fait absence de contrainte tangentielle sur les surfaces planes) ont ici le grand intérêt de permettre un calcul explicite du développement des solutions bifurquées, ce qui n'est pas le cas pour d'autres conditions aux limites. Noter que les calculs explicites présentés ici sont nouveaux, pour ce qui concerne les plages de stabilité ou non des solutions convectives bifurquées (rouleaux, hexagones, triangles, et patchwork) en fonction du nombre de Prandtl. Ceci n'est pas surprenant car nous devons calculer jusqu'à l'ordre 5 certains

coefficients du système de bifurcation pour les amplitudes (ce qui est plutôt lourd), afin de décider quelle est la solution stable, notamment entre le pattern hexagonal et le pattern en triangles. Nous donnons précisément les plages de stabilité, en fonction du nombre de Prandtl, pour toutes les solutions classiques, notamment on trouve que les rouleaux perdent leur stabilité au profit de la seule structure hexagonale qui puisse être stable, qui est le pattern en triangles équilatéraux, (cf les diagrammes de bifurcation à la figure 2). Ceci contredit une idée communément répandue (voir notamment les développements formels dans [8], [5] ainsi que leurs bibliographies et la Remarque 2.3).

Le système d'équations de Navier-Stokes n'est pas suffisant pour décrire la situation. Une équation supplémentaire est nécessaire qui exprime la conservation de l'énergie, où l'énergie interne est proportionnelle à la température. Dans l'approximation de Boussinesq, la dépendance de la densité  $\rho$  en fonction de la température  $T$ ,

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(T - T_0)),$$

où  $\alpha$  est le coefficient d'expansion volumique, est prise en compte dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, dans le terme de forces volumiques extérieures de gravité  $-\rho g e_z$ , introduisant un couplage entre (vitesse  $V$ , pression  $p$ ) et la température  $T$ . Plusieurs échelles différentes sont utilisées dans la littérature. Nous adoptons ici celles de Koschmieder [4], qui consiste à choisir les échelles de longueur, de temps, de vitesse et de température comme  $d$ ,  $d^2/\kappa$ ,  $\kappa/d$ ,  $\nu\kappa/\alpha g d^3$ , où  $d$  est la distance entre les plans,  $\kappa$  est la diffusivité thermique. Ceci conduit au système

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V + \nabla p &= \mathcal{P}(\theta e_z + \Delta V) \\ \nabla \cdot V &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + V \cdot \nabla \theta &= \Delta \theta + \mathcal{R}(V \cdot e_z), \end{aligned} \quad (1)$$

Ici  $\theta$  est la déviation de température par rapport au profil de conduction, qui vérifie la condition aux limites, et  $V = (V_1, V_2, V_z)$ ,  $p$ , et  $\theta$  sont fonctions de  $(x, t)$ ,  $x = (X, z)$ , avec les coordonnées horizontales  $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et la coordonnée verticale  $z \in (0, 1)$ ,  $e_z$  étant le vecteur unitaire ascendant. Il y a deux nombres sans dimension dans ce problème : le nombre de Prandtl  $\mathcal{P}$  et le nombre de Rayleigh  $\mathcal{R}$  respectivement définis par

$$\mathcal{P} = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \mathcal{R} = \frac{\alpha g d^3 (T_0 - T_1)}{\nu \kappa}.$$

On complète le système (1) par les conditions aux limites

$$V_z = \theta = 0, \quad z = 0, 1,$$

et une condition de "surface libre" (absence de contrainte tangentielle)

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_2}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

sur les plans  $z = 0$  et  $z = 1$ .

**Remerciement** : L'auteur remercie chaleureusement Dan Hill pour les figures 3, 4, et 5 représentant la forme des patterns bifurqués.

## 2 Convection tridimensionnelle

On s'intéresse aux solutions périodiques dans le plan, où le réseau des périodes  $\Gamma$  est engendré par deux vecteurs horizontaux indépendants  $\{e_1, e_2\}$ , et le réseau dual des vecteurs d'onde  $\Gamma'$  est engendré par les deux vecteurs  $\{k_1, k_2\}$  définis ci-dessous. Le nombre d'onde critique est le rayon

d'un cercle critique dans le plan de Fourier. Les seules formes possibles de patterns périodiques (voir [1], [3]), sont les rouleaux, les hexagones, les triangles équilatéraux et un pattern nommé "patchwork quilt" dans [1]. Comme l'évidence expérimentale montre principalement (voir [4]) des convections en rouleaux ou en cellules hexagonales, nous choisissons *un réseau compatible avec ces patterns*. Noter que ce choix de réseau a été initié par Sattinger [7]. C'est dans l'interaction entre les quatre types possibles de solutions convectives ayant la périodicité imposée que notre convection est tridimensionnelle.

## 2.1 Formulation comme un système du premier ordre.

On considère le réseau du plan engendré par les combinaisons entières des vecteurs

$$e_1 = h \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad e_2 = h(0, 1),$$

et le réseau dual engendré par les vecteurs d'ondes

$$k_1 = k_c(1, 0), \quad k_2 = k_c \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

où  $h$  est déterminé par le nombre d'onde critique  $k_c$ ,

$$hk_c = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que ce réseau est invariant par les rotations d'angle  $\pi/3$  (voir la Figure 1(i)). Avec des conditions de flux, on choisit les espaces de Hilbert

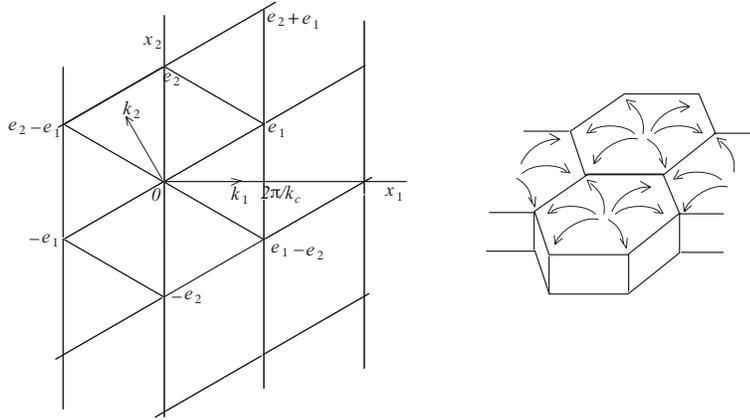


FIGURE 1 – (i) Réseau  $\Gamma$  dans le plan des  $X$ , pour la convection 3D. (ii) Ecoulement dans une cellule hexagonale.

$$\mathcal{X} = \left\{ U \in (L^2((\mathbb{R}^2/\Gamma) \times (0, 1)))^4 ; \nabla \cdot V = 0, V_z|_{z=0,1} = 0, \right. \\ \left. \int_{\Sigma_1} V \cdot k_2 dS = \int_{\Sigma_2} V \cdot k_1 dS = 0 \right\},$$

$$\mathcal{Z} = \left\{ U \in \mathcal{X} \cap (H^2((\mathbb{R}^2/\Gamma) \times (0,1)))^4 ; \nabla \cdot V = 0, \partial V_1/\partial z = \partial V_2/\partial z|_{z=0,1} = \theta|_{z=0,1} = 0, \right. \\ \left. \int_{\Sigma_1} V \cdot k_2 dS = \int_{\Sigma_2} V \cdot k_1 dS = 0 \right\},$$

ou  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont les faces verticales d'une cellule de périodicité, orthogonales aux vecteurs  $k_2$  et  $k_1$ . On pose  $U = (V, \theta)$ , ainsi le système est de la forme

$$\frac{dU}{dt} = \mathbf{L}_{\mathcal{R}}U + \mathbf{R}(U, U) \quad (3)$$

dans  $\mathcal{X}$  pour  $U(., t) \in \mathcal{Z}$ , avec  $\mathbf{L}_{\mathcal{R}}$  et  $\mathbf{R}$  définis ci-dessous :

$$\mathbf{L}_{\mathcal{R}}U = (\mathbf{\Pi}_0 \mathcal{P}(\Delta V + \theta e_z), \Delta \theta + \mathcal{R}V_z), \quad \mathbf{R}(U, U) = (-\mathbf{\Pi}_0(V \cdot \nabla V), -V \cdot \nabla \theta),$$

où la projection  $\mathbf{\Pi}_0$  sur  $\mathcal{X}$  élimine la pression (projection sur un espace de vecteurs de divergence nulle, orthogonal aux gradients) et  $\mathbf{R}$  est bilinéaire symétrique. On note que  $\mathbf{L}_{\mathcal{R}}$  est autoadjoint dans  $\mathcal{X}$  avec le produit scalaire de  $L^2$  suivant :

$$\langle V, V' \rangle + \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{R}} \langle \theta, \theta' \rangle.$$

De plus, il est à résolvante compacte [2], donc avec un spectre discret constitué seulement de valeurs propres réelles de multiplicités finies.

## 2.2 Symétries.

Le problème est invariant par les translations horizontales, représentées par l'opérateur  $\tau_a$

$$(\tau_a U)(X, z) = U(X + a, z), \quad a \in \mathbb{R}^2/\Gamma$$

où  $\tau_h = \mathbb{I}$ , à cause de la condition de périodicité, pour  $h \in \Gamma$ , et invariant par la symétrie de réflexion  $\mathbf{S}$  définie par

$$(\mathbf{S}U)(x_1, x_2, z) = (-V_1(-x_1, x_2, z), V_2(-x_1, x_2, z), V_z(-x_1, x_2, z), \theta(-x_1, x_2, z)), \quad (4)$$

De plus, on a l'invariance par la rotation dans le plan des  $X$ , d'axe vertical et d'angle  $\pi/3$ , représentée par

$$(\mathbf{R}_{\pi/3}U)(X, z) = (R_{\pi/3}(V(R_{-\pi/3}X, z)), \theta(R_{-\pi/3}X, z)), \quad (5)$$

**Remarque 2.1** *Le groupe engendré par  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{R}_{\pi/3}$  se note  $D_6$ , et consiste en les rotations sur le cercle, d'angle  $\pi/3$ , avec les symétries par rapport à un diamètre.*

Enfin, il y a une symétrie supplémentaire par rapport au plan médian  $z = 1/2$ ,

$$(\mathbf{S}_z U)(X, z) = (V_1(X, 1-z), -V_z(X, 1-z), -\theta(X, 1-z)). \quad (6)$$

Les opérateurs  $\tau_a$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{R}_{\pi/3}$ ,  $\mathbf{S}_z$  commutent avec le système (3).

## 2.3 Etude de l'opérateur linéaire

On rappelle ici quelques résultats classiques (voir notamment [6]).

On cherche les valeurs propres  $\lambda$  telles que

$$\mathbf{L}_{\mathcal{R}}U = \lambda U, \quad U \in \mathcal{Z}.$$

La périodicité  $\Gamma$  implique que l'on cherche  $U$  sous la forme

$$U = e^{ik \cdot X} \widehat{U}(z),$$

avec  $k \in \Gamma' \subset \mathbb{R}^2$ . On a ainsi

$$\widehat{U}(z) = (\widehat{V}_\perp(z), \widehat{V}_z(z), \widehat{\theta}(z))$$

$$ik \cdot \widehat{V}_\perp + D\widehat{V}_z = 0,$$

$$(D^2 - k^2)(D^2 - k^2 - \frac{\lambda}{\mathcal{P}})\widehat{V}_z = k^2\widehat{\theta},$$

$$(D^2 - k^2 - \lambda)\widehat{\theta} = -\mathcal{R}\widehat{V}_z,$$

avec

$$\widehat{V}_z = D^2\widehat{V}_z = \widehat{\theta} = 0 \text{ for } z = 0, 1.$$

On obtient ainsi (voir la remarque 2.2 ci-dessous)

$$\widehat{V}_z(z) = \sin \pi z,$$

et

$$(\pi^2 + k^2 + \frac{\lambda}{\mathcal{P}})(\pi^2 + k^2 + \lambda) - \frac{k^2\mathcal{R}}{(\pi^2 + k^2)} = 0,$$

qui est du second degré en  $\lambda$ , et dont le discriminant est positif :

$$(\pi^2 + k^2)^2(\frac{1}{\mathcal{P}} - 1)^2 + \frac{4k^2\mathcal{R}}{\mathcal{P}(\pi^2 + k^2)} > 0$$

Il résulte pour toutes les valeurs propres (qui sont réelles), que si

$$(\pi^2 + k^2)^2 - \frac{k^2\mathcal{R}}{(\pi^2 + k^2)} > 0$$

(ce qui arrive si  $\mathcal{R}$  assez petit) alors

$$\lambda \text{ réel} < 0.$$

On doit alors étudier la fonction

$$\mathcal{R}(k^2) = \frac{(\pi^2 + k^2)^3}{k^2},$$

qui est convexe, atteint son minimum

$$\mathcal{R}_c = \frac{27\pi^4}{4}$$

pour

$$k_c = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

et tend vers l'infini pour  $|k| \rightarrow 0$  et pour  $|k| \rightarrow \infty$ . Il résulte que pour  $k \in$  cercle de rayon  $k_c$  l'opérateur linéaire  $\mathbf{L}_{\mathcal{R}_c}$  a une valeur propre nulle, les autres valeurs propres restant négatives. En fixant le nombre de Prandtl  $\mathcal{P}$  et en prenant le nombre de Rayleigh  $\mathcal{R}$  comme paramètre de bifurcation qu'on fait croître, il y a une valeur critique  $\mathcal{R}_c$  pour laquelle, la plus grande valeur propre réelle de  $\mathbf{L}_{\mathcal{R}}$  traverse l'axe des imaginaires de gauche à droite, passant par 0.

**Remarque 2.2** On pouvait choisir  $\widehat{V}_z(z) = \sin n\pi z$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ; on peut remarquer que cela donne une infinité de courbe  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_n(k^2)$  où  $\pi^2$  est remplacé par  $n^2\pi^2$ , ce qui donne pour  $n > 1$  un  $\mathcal{R}_{nc}$  critique plus grand que le  $\mathcal{R}_c$  obtenu pour  $n = 1$ .

## 2.4 Bifurcations

Pour  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_c$  la valeur propre 0 est de multiplicité 6. Les vecteurs propres associés sont de la forme

$$\zeta_j = e^{ik_j \cdot X} \widehat{U}_j(z), \quad j = 1, \dots, 6, \quad |k_j| = k_c$$

et vérifient

$$\widehat{U}_1(z) = \begin{pmatrix} i\sqrt{2} \cos \pi z \\ 0 \\ \sin \pi z \\ \frac{9\pi^2}{2} \sin \pi z \end{pmatrix}, \quad \widehat{U}_2(z) = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \cos \pi z \\ \frac{i\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cos \pi z \\ \sin \pi z \\ \frac{9\pi^2}{2} \sin \pi z \end{pmatrix}, \quad \widehat{U}_3(z) = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \cos \pi z \\ -\frac{i\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cos \pi z \\ \sin \pi z \\ \frac{9\pi^2}{2} \sin \pi z \end{pmatrix},$$

où

$$\zeta_2 = \mathbf{R}_{2\pi/3} \zeta_1, \quad \zeta_3 = \mathbf{R}_{-2\pi/3} \zeta_1, \quad \zeta_{j+3} = \mathbf{S} \zeta_j = \overline{\zeta_j}, \quad j = 1, 2, 3, \\ k_3 = -(k_1 + k_2), \quad k_{j+3} = -k_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

De plus

$$\tau_a \zeta_j = e^{ik_j \cdot a} \zeta_j, \quad e^{ik_3 \cdot a} = e^{-i(k_1 + k_2) \cdot a},$$

et, l'action de la symétrie  $\mathbf{S}_z$  est  $-\mathbb{I}$  à cause du facteur  $\sin(\pi z)$  dans les composantes  $V_z$  et  $\theta$ , et du facteur  $\cos(\pi z)$  dans les composantes  $V_1$  et  $V_2$  de  $\widehat{U}_j(z)$ , dans la formule du vecteur propre  $\zeta_j$ .

On montre dans [2] que la dynamique locale au voisinage de  $\mathcal{R}_c$  se réduit à une variété centrale de dimension 6, de la forme

$$U = U_0 + \Phi(\mu, U_0) \quad (7)$$

avec  $\mu = \mathcal{R} - \mathcal{R}_c$ ,  $U_0 \in \mathcal{E}_0$  espace propre associé à la valeur propre 0 de  $\mathbf{L}_{\mathcal{R}_c}$  :

$$U_0 = A\zeta_1 + B\zeta_2 + C\zeta_3 + \overline{A\zeta_1} + \overline{B\zeta_2} + \overline{C\zeta_3}, \quad (8)$$

et  $\Phi$  de classe  $C^k$ ,  $k$  fixé aussi grand qu'on veut, où son développement de Taylor s'écrit

$$\Phi(\mu, U_0) = \sum_{s+p+p'+q+q'+r+r' \geq 2} \mu^s A^p \overline{A}^{p'} B^q \overline{B}^{q'} C^r \overline{C}^{r'} \Phi_{pp'qq'rr'}^{(s)},$$

$$\Phi_{pp'qq'rr'}^{(s)} = e^{i[(p-p')k_1 + (q-q')k_2 + (r-r')k_3] \cdot X} \widehat{\Phi}_{pp'qq'rr'}^{(s)}(z), \\ \widehat{\Phi}_{p'p'q'q'r'r'}^{(s)} = \overline{\widehat{\Phi}_{pp'qq'rr'}^{(s)}}.$$

Nous devons alors vérifier le système réduit (souvent appelé "systèmes aux amplitudes")

$$\frac{dU_0}{dt} = \mathbf{L}_{\mathcal{R}} \Phi(\mu, U_0) + \mathbf{R}(U_0 + \Phi(\mu, U_0), U_0 + \Phi(\mu, U_0)). \quad (9)$$

De plus, ce système hérite de l'invariance par les symétries induites :

$$\tau_a(A, B, C) = (Ae^{ik_1 \cdot a}, Be^{ik_2 \cdot a}, Ce^{ik_3 \cdot a}) \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}^2/\Gamma, \quad (10) \\ \mathbf{S}(A, B, C) = (\overline{A}, \overline{C}, \overline{B}), \quad \mathbf{R}_{2\pi/3}(A, B, C) = (C, A, B),$$

$$\mathbf{R}_\pi(A, B, C) = (\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}), \quad \mathbf{S}_z(A, B, C) = -(A, B, C).$$

La forme générale des champs de vecteurs de  $\mathbb{R}^6$  commutant avec ces symétries est décrite en Appendice A.1.

Pour obtenir la partie principale des solutions bifurquées, il est suffisant de considérer le système de dimension 6, tronqué à l'ordre 3, de la forme

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= a\mu A + bA|A|^2 + dA(|B|^2 + |C|^2) \\ \frac{dB}{dt} &= a\mu B + bB|B|^2 + dB(|C|^2 + |A|^2) \\ \frac{dC}{dt} &= a\mu C + bC|C|^2 + dC(|A|^2 + |B|^2).\end{aligned}\tag{11}$$

Ici  $a > 0$ , et tous les coefficients sont réels. Le coefficient  $b$  est  $< 0$  comme montré ci-dessous. On montre qu'il y a 4 types de solutions stationnaires : *rouleaux*, *hexagones*, *triangles équilatéraux*, et les *"patchwork quilts"*, qui peuvent être stables ou instables, selon les coefficients, mais pas simultanément [1]. Ceci confirme une prédiction de [3], bien que seulement les deux premiers types de solutions soient usuellement observés.

(i) Une première classe de solutions stationnaires est obtenue avec  $B = C = 0$ . On retrouve l'équation de Landau pour  $A$ , qui fournit le "cercle" (dans l'espace  $\mathcal{Z}$ ) de solutions stationnaires (en faisant varier la phase de  $A$ )

$$a\mu + b|A|^2 = 0, \quad B = C = 0,$$

correspondant aux rouleaux de convection stationnaire (convection bidimensionnelle) et à leurs translatés dont la bifurcation est supercritique puisque  $b < 0$ . On a ici en plus, des solutions obtenues par les actions de  $\mathbf{R}_{2\pi/3}$  et  $S$  qui correspondent aux rouleaux de convection obtenus après une rotation d'angle  $2\pi/3$  des rouleaux bidimensionnels ci-dessus. On a ainsi *trois "cercles de rouleaux"* dans l'espace  $\mathcal{Z}$ . Au contraire du cas bidimensionnel où le réseau  $\Gamma'$  est engendré par  $k_1$  seulement, dans lequel ces rouleaux sont stables, ici ils peuvent être instables. En effet, puisqu'on a un "cercle" de solutions bifurquées, une valeur propre de l'opérateur linéarisé est 0, et les autres valeurs propres sont maintenant  $2b|A|^2$ , et une valeur propre quadruple  $(d - b)|A|^2$ . On déduit qu'une condition de stabilité de ces rouleaux est

$$d < b < 0.$$

Le calcul de  $d$  à la section 3.3 montre que pour

$$\begin{aligned}\mathcal{P} < 0.6956 &\text{ alors } b - d < 0, \\ \mathcal{P} > 0.6956 &\text{ alors } b - d > 0,\end{aligned}\tag{12}$$

d'où la stabilité des rouleaux pour  $\mathcal{P} > 0.6956$ .

**Remarque 2.3** *Il faut remarquer que les méthodes qui conduisent à la réduction à une seule équation de bifurcation comme, notamment, fait implicitement et formellement dans [8], et les calculs antérieurs avec symétrie imposée, ne peuvent conclure qu'à la stabilité des rouleaux pour tous les nombres de Prandtl, puisqu'on obtient alors la seule valeur propre négative  $2b|A|^2$  en oubliant la compétition entre les diverses solutions convectives bifurquées. Cette compétition est envisagée dans [5], où l'auteur affirme que seuls les rouleaux peuvent être stables. En fait l'auteur dit p.56 qu'il a supposé implicitement que le nombre de Prandtl est modéré ou grand. Ceci confirme (12) et les diagrammes de bifurcation à la Figure 2.*

(ii) Une deuxième classe de solutions stationnaires du système (11) est obtenue avec

$$A = re^{i\theta_1}, \quad B = re^{i\theta_2}, \quad C = re^{i\theta_3},$$

où  $r > 0$  vérifie

$$a\mu + (b + 2d)r^2 = 0,\tag{13}$$

et les phases  $\theta_j$  sont arbitraires. Le calcul fait à la section 3.3 montre que

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &> 0.3795 \text{ alors } b + 2d < 0, \\ \mathcal{P} &< 0.3795 \text{ alors } b + 2d > 0. \end{aligned} \tag{14}$$

La bifurcation est donc supercritique pour  $\mathcal{P} > 0.3795$  et sous-critique si  $\mathcal{P} < 0.3795$ . On montre qu'il y a alors deux types de solutions (voir l'Appendice A.2) invariantes par les actions de  $\mathbf{R}_{2\pi/3}$  et  $\mathbf{S}$ . Pour  $\theta_j = 0$ , ça correspond aux *cellules hexagonales de convection* (voir la Figure 3). Pour  $\theta_j = \pi/2$  ça correspond aux cellules en triangles équilatéraux (voir la Figure 4). Un argument utilisant la périodicité et la symétrie  $\mathbf{S}$ , montre que le champ de vitesses des particules est tangent aux plans  $x_1 = 2\pi n/k_c$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . D'où, par l'invariance par la symétrie  $D_6$ , la vitesse est tangente à tous les plans verticaux déduits à partir de cette famille, par rotations d'angles  $\pi/3$  et  $2\pi/3$ . Ceci veut dire que les particules de fluide sont confinées dans des prismes triangulaires verticaux, et un prisme hexagonal de base est formé avec 6 de ces prismes triangulaires.

L'opérateur linéarisé (du système tronqué) en ces cellules hexagonales de convection a une valeur propre triple 0. Une valeur propre double correspond à la liberté de choix des phases ( $\theta_1$  et  $\theta_2$  par exemple) qui correspond aux solutions translatées dans le plan. La troisième valeur propre nulle obtenue pour le système tronqué (11) exprime le besoin de considérer des termes d'ordres supérieurs pour lever la dégénérescence (voir (16)). On a aussi une valeur propre simple  $2(b + 2d)r^2$ , et une valeur propre double  $2(b - d)r^2$ . Cette dernière implique que les cellules hexagonales de convection et les rouleaux de convection ne peuvent pas être stables en même temps. De plus, on montre (cf. Appendice A.2) que seule la solution correspondant à  $\theta_j = \pi/2$  peut être stable. On renvoie le lecteur à [1, Chap. XIII], où le problème est traité en utilisant la méthode de Lyapunov-Schmidt, mais les résultats s'adaptent à notre approche.

(iii) Une troisième classe de solutions stationnaires du système (11) est obtenue avec

$$A = re^{i\theta_1}, \quad B = re^{i\theta_2}, \quad C = 0,$$

qui correspond aux cellules nommées "patchwork quilt" dans [1] (voir la Figure 5). On a également deux solutions analogues en faisant agir la rotation  $\mathbf{R}_{2\pi/3}$ . On a alors

$$a\mu + (b + d)r^2 = 0.$$

On montre à la section 3.3 que la bifurcation est supercritique ( $b + d < 0$ ) pour  $\mathcal{P} > 0.4483$  et sous-critique si  $\mathcal{P} < 0.4483$ . L'opérateur linéarisé en ces cellules de convection a une valeur propre double 0, qui correspond à la liberté de choix des phases  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (correspondant aux translatés horizontaux des cellules), une valeur propre double  $(d - b)r^2$ , et deux valeurs propres simples  $2(b \pm d)r^2$ . Il en résulte que cette solution patchwork est toujours instable, même si  $b + d < 0$  et  $d - b < 0$ .

Les calculs ci-dessous montrent donc que si

$$0.3795 < \mathcal{P} < 0.6956,$$

on a

$$b + 2d < 0, \text{ et } b - d < 0,$$

ce qui correspond à un pattern hexagonal potentiellement stable pour le système (11) et à des rouleaux instables. Noter que si l'on ne cherche que les solutions bidimensionnelles, cela donne des rouleaux stables, puisque  $b < 0$ . Le calcul du coefficient  $d$  est nécessaire si l'on veut mettre en compétition les rouleaux et les hexagones. Néanmoins pour une étude complète de la *stabilité du pattern hexagonal*, il est nécessaire de considérer les *termes d'ordres supérieurs* à ceux de (11). En

fait on montre dans l'Appendice A.1 que le système de dimension 6, non tronqué est de la forme

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= AP_1[\mu, |A|^2, |B|^2 + |C|^2, |B|^2|C|^2, (ABC)^2] + \\
&\quad + \overline{BC}(\overline{ABC})P_2[\mu, |A|^2, |B|^2 + |C|^2, |B|^2|C|^2, (\overline{ABC})^2], \\
\frac{dB}{dt} &= BP_1[\mu, |B|^2, |C|^2 + |A|^2, |C|^2|A|^2, (ABC)^2] + \\
&\quad + \overline{CA}(\overline{ABC})P_2[\mu, |B|^2, |C|^2 + |A|^2, |C|^2|A|^2, (\overline{ABC})^2], \\
\frac{dC}{dt} &= CP_1[\mu, |C|^2, |A|^2 + |B|^2, |A|^2|B|^2, (ABC)^2] + \\
&\quad + \overline{AB}(\overline{ABC})P_2[\mu, |C|^2, |A|^2 + |B|^2, |A|^2|B|^2, (\overline{ABC})^2],
\end{aligned} \tag{15}$$

avec  $P_1$  et  $P_2$  fonctions régulières de leurs arguments, avec des coefficients réels. Il en résulte qu'un terme "exotique" de degré 5 intervient, par exemple

$$\overline{cBC}(\overline{ABC}) \text{ dans } \frac{dA}{dt}.$$

On introduit ainsi

$$A = r_1 e^{i\theta_1}, B = r_2 e^{i\theta_2}, C = r_3 e^{i\theta_3} \quad \Theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

et (15) devient aux ordres principaux (si  $ABC \neq 0$ )

$$\begin{aligned}
\frac{dr_1}{dt} &= r_1[a\mu + br_1^2 + d(r_2^2 + r_3^2) + e(r_2^4 + r_3^4) + fr_2^2r_3^2 + cr_2^2r_3^2 \cos 2\Theta] \\
\frac{dr_2}{dt} &= r_2[a\mu + br_2^2 + d(r_1^2 + r_3^2) + e(r_1^4 + r_3^4) + fr_1^2r_3^2 + cr_1^2r_3^2 \cos 2\Theta] \\
\frac{dr_3}{dt} &= r_3[a\mu + br_3^2 + d(r_2^2 + r_1^2) + e(r_2^4 + r_1^4) + fr_2^2r_1^2 + cr_2^2r_1^2 \cos 2\Theta] \\
\frac{d\theta_1}{dt} &= -cr_2^2r_3^2 \sin 2\Theta \\
\frac{d\theta_2}{dt} &= -cr_1^2r_3^2 \sin 2\Theta \\
\frac{d\theta_3}{dt} &= -cr_2^2r_1^2 \sin 2\Theta.
\end{aligned} \tag{16}$$

On s'intéresse aux solutions stationnaires obtenues pour

$$\begin{aligned}
r_1 &= r_2 = r_3 = r \\
\theta_1 &= \theta_{10}, \theta_2 = \theta_{20}, \theta_3 = \theta_{30} \\
\theta_{10} + \theta_{20} + \theta_{30} &= k\pi/2, \quad k = 0, 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{17}$$

$$0 = a\mu + (b + 2d)r^2 + 2er^4 + fr^4 + cr^4(-1)^k, \tag{18}$$

qui correspond à (13), mais avec une restriction sur les phases  $\theta_{j0}$ , où seulement deux d'entre elles sont arbitraires. Noter qu'on obtient deux amplitudes distinctes selon que  $k$  est pair ou impair. On montre en Appendice A.2 qu'il n'y a en fait que deux familles : ( $k = 0, 2$  et  $k = 1, 3$ ) de solutions définies à translation et rotation de  $2\pi/3$  près.

**Remarque 2.4** *L'étude pour le système complet (15) se réduit ici à une seule équation de bifurcation*

$$P_1(\mu, r^2, 2r^2, r^4, r^6(-1)^k) + (-1)^k r^4 P_2(\mu, r^2, 2r^2, r^4, r^6(-1)^k) = 0$$

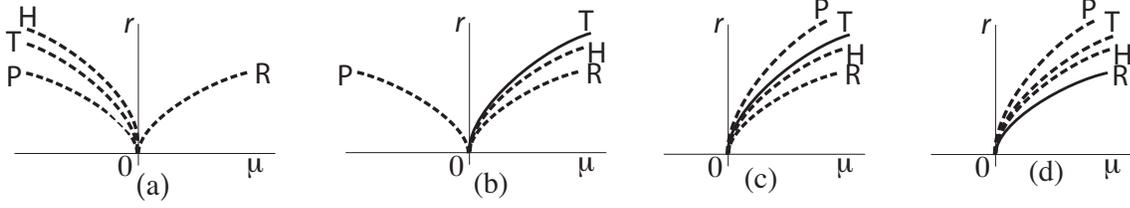


FIGURE 2 – Diagrammes de bifurcation. R : rouleaux, H : hexagones, T : triangles, P : pathchwork. (a) :  $\mathcal{P} < 0.3795$ , (b) :  $0.3795 < \mathcal{P} < 0.4483$ , (c) :  $0.4483 < \mathcal{P} < 0.6956$ , (d) :  $0.6956 < \mathcal{P}$ . Les traits pleins indiquent les solutions stables, en pointillés les solutions instables.

dont la partie principale est (18). Il est alors facile en utilisant le théorème des fonctions implicites par rapport à  $\mu$ , d'obtenir la solution de la forme (en supposant que  $b$  et  $d$  ne dépendent pas de  $\mu$ )

$$\begin{aligned}\mu &= -\frac{b+2d}{a}r^2 + \alpha_k r^4 + \mathcal{O}(r^6), \\ \alpha_k &= -\frac{1}{a}(2e + f + c(-1)^k).\end{aligned}$$

L'étude de la stabilité de ces patterns est exposée à l'Appendice A.2. On trouve à l'ordre principal, les valeurs propres

$$\begin{aligned}2(b+2d)r^2 &\text{ simple} \\ 2(b-d)r^2 &\text{ double} \\ -6cr^4(-1)^k &\text{ simple} \\ 0 &\text{ double.}\end{aligned}$$

Pour  $k = 0, 2$  il s'agit des cellules hexagonales telles que montrées à la Figure 1(ii), alors que pour  $k = 1, 3$  il s'agit d'un pattern en triangles équilatéraux. Il en résulte que si  $c \neq 0$ , une (seulement) des deux familles de solutions est stable, à condition de satisfaire

$$b + 2d < 0, \text{ et } b - d < 0.$$

On montre ci-dessous que le coefficient  $c$  est  $< 0$  pour les valeurs de  $\mathcal{P}$  telles que les conditions ci-dessus soient vérifiées, ce qui implique l'instabilité (faible) du pattern hexagonal et la stabilité du pattern en triangles équilatéraux.

Dans la suite, après avoir calculé les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $d$  qui sont accessibles à l'ordre cubique, nous calculons le coefficient  $c$  (ordre 5, donc calculs plus lourds) qui détermine la stabilité de l'une des 2 solutions à structure hexagonale. On donne à la Figure 2 les diagrammes de bifurcation pour les différentes plages de valeurs de  $\mathcal{P}$ .

## 2.5 Expression explicite de la partie principale

### 2.5.1 Solution en pattern hexagonal

La solution bifurquée obtenue pour

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,$$

s'écrit

$$U = r(\zeta_1 + \bar{\zeta}_1 + \zeta_2 + \bar{\zeta}_2 + \zeta_3 + \bar{\zeta}_3) + \mathcal{O}(r^2),$$

avec

$$a\mu + (b + 2d)r^2 = 0.$$

On a

$$\zeta_1 = e^{ik_c x_1} \widehat{U}_1(z), \quad \zeta_2 = e^{ik_c(-\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2)} \widehat{U}_2(z), \quad \zeta_3 = e^{ik_c(-\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2)} \widehat{U}_3(z),$$

d'où (avec  $k_c = \pi/\sqrt{2}$ )

$$\zeta_1 + \overline{\zeta_1} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \sin k_c x_1 \cos \pi z \\ 0 \\ 2 \cos k_c x_1 \sin \pi z \\ 9\pi^2 \cos k_c x_1 \sin \pi z \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\zeta_2 + \overline{\zeta_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin k_c(-\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2) \cos \pi z \\ -\sqrt{6} \sin k_c(-\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2) \cos \pi z \\ 2 \cos k_c(-\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2) \sin \pi z \\ 9\pi^2 \cos k_c(-\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2) \sin \pi z \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\zeta_3 + \overline{\zeta_3} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin k_c(-\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2) \cos \pi z \\ \sqrt{6} \sin k_c(-\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2) \cos \pi z \\ 2 \cos k_c(-\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2) \sin \pi z \\ 9\pi^2 \cos k_c(-\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2) \sin \pi z \end{pmatrix}.$$

On montre à la figure 3 la forme du champ des vitesses du pattern hexagonal à la surface  $z = 1$

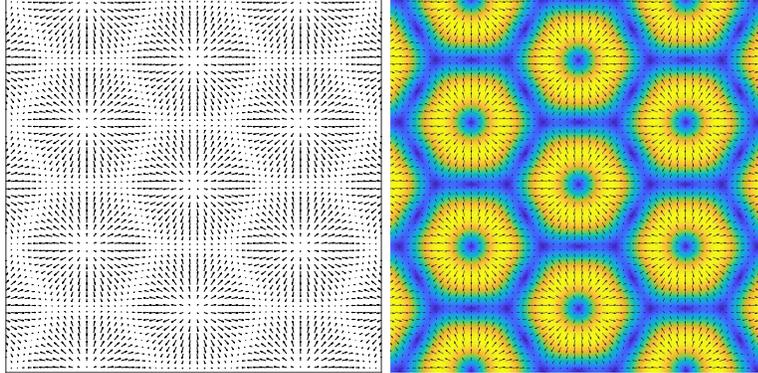


FIGURE 3 – Hexagones (i)champ de vitesses, (ii) module des vitesses.

### 2.5.2 Solution en pattern triangulaire

La solution bifurquée obtenue pour

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \pi/2,$$

s'écrit

$$U = r[(i\zeta_1 - i\overline{\zeta_1}) + (i\zeta_2 - i\overline{\zeta_2}) + (i\zeta_3 - i\overline{\zeta_3})] + \mathcal{O}(r^2),$$

avec

$$a\mu + (b + 2d)r^2 = 0,$$

où (avec  $k_c = \pi/\sqrt{2}$ )

$$i\zeta_1 - i\bar{\zeta}_1 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \cos k_c x_1 \cos \pi z \\ 0 \\ -2 \sin k_c x_1 \sin \pi z \\ -9\pi^2 \sin k_c x_1 \sin \pi z \end{pmatrix},$$

$$i\zeta_2 - i\bar{\zeta}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos k_c \left(-\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) \cos \pi z \\ -\sqrt{6} \cos k_c \left(-\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) \cos \pi z \\ -2 \sin k_c \left(-\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) \sin \pi z \\ -9\pi^2 \sin k_c \left(-\frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) \sin \pi z \end{pmatrix},$$

$$i\zeta_3 - i\bar{\zeta}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos k_c \left(-\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) \cos \pi z \\ \sqrt{6} \cos k_c \left(-\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) \cos \pi z \\ -2 \sin k_c \left(-\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) \sin \pi z \\ -9\pi^2 \sin k_c \left(-\frac{x_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) \sin \pi z \end{pmatrix}.$$

On montre à la figure 4 la forme du champ des vitesses du pattern triangulaire à la surface  $z = 1$

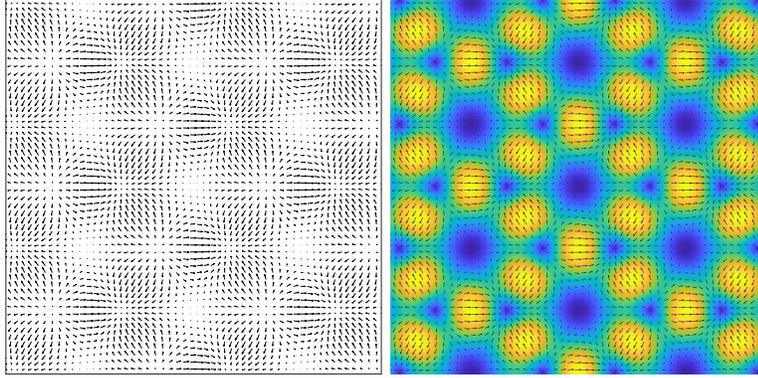


FIGURE 4 – Triangles (i)champ de vitesses, (ii) module des vitesses.

### 2.5.3 Solution en patchwork

Il s'agit de la solution obtenue avec  $C = 0$  :

$$U = r(\zeta_1 + \bar{\zeta}_1 + \zeta_2 + \bar{\zeta}_2) + \mathcal{O}(r^2)$$

avec

$$a\mu + (b + d)r^2 = 0,$$

et où  $\zeta_1 + \bar{\zeta}_1$  est donné par (19) et  $\zeta_2 + \bar{\zeta}_2$  par (20).

On montre à la figure 5 la forme du champ des vitesses du pattern triangulaire à la surface  $z = 1$

## 3 Calcul des coefficients $a, b, d$

On sait déjà que  $a > 0, b < 0$ , par un argument qualitatif (voir ci-dessous). On veut les calculer, ainsi que  $d$ .

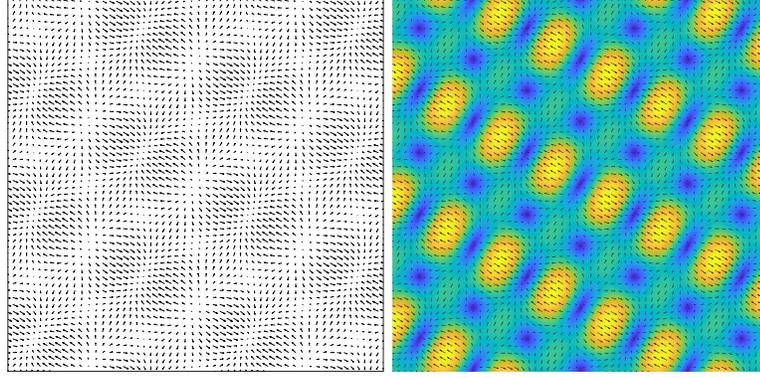


FIGURE 5 – Pathchwork (i) champ de vitesses, (ii) module des vitesses.

### 3.1 Calcul de $a$

On a d'abord

$$\mathbf{L}_{\mathcal{R}} = \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} + \mu \mathbf{L}_1$$

avec

$$\mathbf{L}_1 U = (0, V_z).$$

Le coefficient  $a$  s'obtient, avec le produit scalaire tel que  $\mathbf{L}_{\mathcal{R}_c}$  soit auto-adjoint, par

$$a \langle \zeta_1, \zeta_1 \rangle = \langle \mathbf{L}_1 \zeta_1, \zeta_1 \rangle,$$

i.e.

$$\begin{aligned} a \langle \widehat{U}_1, \widehat{U}_1 \rangle &= \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{R}_c} \langle \sin \pi z, \frac{2\mathcal{R}_c}{3\pi^2} \sin \pi z \rangle = \frac{\mathcal{P}}{3\pi^2}, \\ \langle \widehat{U}_1, \widehat{U}_1 \rangle &= \frac{3}{2} + \frac{\mathcal{P}}{2\mathcal{R}_c} \left( \frac{2\mathcal{R}_c}{3\pi^2} \right)^2 = \frac{3}{2} (1 + \mathcal{P}) \end{aligned}$$

d'où

$$a = \frac{2\mathcal{P}}{\pi^2(1 + \mathcal{P})}.$$

### 3.2 Calcul de $b$

Le coefficient  $b$  se calcule à partir de

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{2000} + \mathbf{R}(\zeta_1, \zeta_1) &= 0 \\ \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{1100} + 2\mathbf{R}(\zeta_1, \overline{\zeta_1}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b\zeta_1 &= \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{2100} + 2\mathbf{R}(\zeta_1, \Phi_{1100}) + 2\mathbf{R}(\overline{\zeta_1}, \Phi_{2000}), \\ b \langle \zeta_1, \zeta_1 \rangle &= \langle 2\mathbf{R}(\zeta_1, \Phi_{1100}) + 2\mathbf{R}(\overline{\zeta_1}, \Phi_{2000}), \zeta_1 \rangle. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\mathbf{R}(\overline{\zeta_1}, \Phi_{0200}) \text{ et } \mathbf{R}(\zeta_1, \Phi_{2000})$$

sont orthogonaux à  $\zeta_1 + \overline{\zeta_1}$  puisque  $e^{\pm 3ik_c x_1}$  est orthogonal à  $e^{\pm ik_c x_1}$ . On en déduit

$$b \langle \zeta_1 + \overline{\zeta_1}, \zeta_1 + \overline{\zeta_1} \rangle = \langle 2\mathbf{R}(\zeta_1 + \overline{\zeta_1}, \Phi_2), \zeta_1 + \overline{\zeta_1} \rangle$$

avec  $\Phi_2$  défini par

$$\mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_2 + \mathbf{R}(\zeta_1 + \overline{\zeta_1}, \zeta_1 + \overline{\zeta_1}) = 0.$$

Une propriété remarquable du terme quadratique de (3) est que

$$\langle \mathbf{R}(U, U), U \rangle = 0, \quad \forall U \text{ réel dans } \mathcal{Z},$$

d'où on déduit

$$2\langle \mathbf{R}(U_1, U_2), U_1 \rangle + \langle \mathbf{R}(U_1, U_1), U_2 \rangle = 0 \quad \forall U_1, U_2 \text{ réels dans } \mathcal{Z}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} b\langle \zeta_1 + \overline{\zeta_1}, \zeta_1 + \overline{\zeta_1} \rangle &= -\langle \mathbf{R}(\zeta_1 + \overline{\zeta_1}, \zeta_1 + \overline{\zeta_1}), \Phi_2 \rangle \\ &= \langle \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_2, \Phi_2 \rangle \end{aligned}$$

qui est  $< 0$  puisque  $\Phi_2$  est orthogonal au noyau de  $\mathbf{L}_{\mathcal{R}_c}$  qui est auto-adjoint, et que toutes ses valeurs propres non nulles sont  $< 0$ . Cette propriété, remarquée par V.Yudovich [11], ne raccourcit pas vraiment le calcul explicite de  $b$ . On a successivement

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\zeta_1, \zeta_1) &= \left( \Pi_0 \begin{pmatrix} i\pi\sqrt{2}e^{2ik_c x_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \\ 2\mathbf{R}(\zeta_1, \overline{\zeta_1}) &= \left( \Pi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\pi \sin 2\pi z \\ -(\frac{2\mathcal{R}_c}{3\pi^2})2\pi \sin 2\pi z \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Le calcul de  $\Phi_{2000} = e^{2ik_c x_1}(\widehat{V}, \widehat{\theta})(z)$  donne

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(D^2 - 4k_c^2)\widehat{V}_1 + 2ik_c\phi &= -i\pi\sqrt{2} \\ \mathcal{P}[(D^2 - 4k_c^2)\widehat{V}_z + \widehat{\theta}] + D\phi &= 0 \\ (D^2 - 4k_c^2)\widehat{\theta} + \mathcal{R}_c\widehat{V}_z &= 0 \\ 2ik_c\widehat{V}_1 + D\widehat{V}_z &= 0 \end{aligned}$$

avec

$$\widehat{\theta} = \widehat{V}_z = D\widehat{V}_1 = 0 \text{ en } z = 0, 1.$$

On a donc

$$\Phi_{2000} = 0, \quad \phi = -\frac{\pi}{k_c\sqrt{2}}.$$

Le calcul de  $\Phi_{1100} = (\widehat{V}, \widehat{\theta})(z)$  donne

$$\begin{aligned} \mathcal{P}D^2\widehat{V}_1 &= 0 \\ \mathcal{P}(D^2\widehat{V}_z + \widehat{\theta}) + D\phi &= 2\pi \sin 2\pi z \\ D^2\widehat{\theta} + \mathcal{R}_c\widehat{V}_z &= \left(\frac{2\mathcal{R}_c}{3\pi^2}\right)2\pi \sin 2\pi z, \\ D\widehat{V}_z &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\widehat{\theta} = \widehat{V}_z = D\widehat{V}_1 = 0 \text{ en } z = 0, 1.$$

On a donc (en prenant la constante  $\widehat{V}_1 = 0$  à cause des conditions de flux dans  $\mathcal{X}$ )

$$\Phi_{1100} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(\frac{2\mathcal{R}_c}{3\pi^2})\frac{1}{2\pi} \sin 2\pi z \end{pmatrix}.$$

Maintenant

$$2\mathbf{R}(\zeta_1, \Phi_{1100}) = e^{ik_c x_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\mathcal{R}_c}{3\pi^2}(-\sin \pi z + \sin 3\pi z) \end{pmatrix}.$$

on déduit

$$\begin{aligned} b\frac{3}{2}(1 + \mathcal{P}) &= -\frac{\mathcal{P}\mathcal{R}_c}{9\pi^4} = -\frac{3}{4}\mathcal{P} \\ b &= -\frac{\mathcal{P}}{2(1 + \mathcal{P})} = -a\pi^2/4. \end{aligned}$$

### 3.3 Calcul de $d$

Le coefficient  $d$  se calcule à partir de

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{0011} + 2\mathbf{R}(\zeta_2, \overline{\zeta_2}) &= 0 \\ \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{1001} + 2\mathbf{R}(\zeta_1, \overline{\zeta_2}) &= 0 \\ \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{1010} + 2\mathbf{R}(\zeta_1, \zeta_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$d\zeta_1 = \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{1011} + 2\mathbf{R}(\zeta_1, \Phi_{0011}) + 2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{1001}) + 2\mathbf{R}(\overline{\zeta_2}, \Phi_{1010}).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} 2\mathbf{R}(\zeta_1, \overline{\zeta_2}) &= \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{i(k_1 - k_2) \cdot X} \begin{pmatrix} \frac{i}{2}(3 - \cos 2\pi z)(k_1 - k_2) \\ -\frac{\pi}{2} \sin 2\pi z \end{pmatrix} \\ -\frac{2\mathcal{R}_c}{3\pi^2} \frac{\pi}{2} e^{i(k_1 - k_2) \cdot X} \sin 2\pi z \end{pmatrix}, \\ 2\mathbf{R}(\zeta_1, \zeta_2) &= \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{i(k_1 + k_2) \cdot X} \begin{pmatrix} \frac{i}{2}(1 - 3 \cos 2\pi z)(k_1 + k_2) \\ -\frac{\pi}{2} \sin 2\pi z \end{pmatrix} \\ -\frac{2\mathcal{R}_c}{3\pi^2} \frac{\pi}{2} e^{i(k_1 + k_2) \cdot X} \sin 2\pi z \end{pmatrix}, \\ 2\mathbf{R}(\zeta_2, \overline{\zeta_2}) &= \begin{pmatrix} \Pi_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\pi \sin 2\pi z \end{pmatrix} \\ -(\frac{2\mathcal{R}_c}{3\pi^2})2\pi \sin 2\pi z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a ainsi  $\Phi_{0011} = \Phi_{1100}$ .

Le calcul de  $\Phi_{1001} = e^{i(k_1 - k_2) \cdot X} (\widehat{V}_\perp, \widehat{V}_z, \widehat{\theta})(z)$  donne

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(D^2 - 3k_c^2)\widehat{V}_\perp + i(k_1 - k_2)\phi &= -\frac{i}{2}(3 - \cos 2\pi z)(k_1 - k_2) \\ \mathcal{P}[(D^2 - 3k_c^2)\widehat{V}_z + \widehat{\theta}] + D\phi &= \frac{\pi}{2} \sin 2\pi z \\ (D^2 - 3k_c^2)\widehat{\theta} + \mathcal{R}_c \widehat{V}_z &= \frac{2\mathcal{R}_c}{3\pi^2} \frac{\pi}{2} \sin 2\pi z \\ i(k_1 - k_2) \cdot \widehat{V}_\perp + D\widehat{V}_z &= 0, \\ \widehat{V}_z &= D^2 \widehat{V}_z = \widehat{\theta} = 0 \text{ for } z = 0, 1, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\widehat{V}_z &= v_{1001} \sin 2\pi z, \\ \widehat{\theta} &= \vartheta_{1001} \sin 2\pi z, \\ \widehat{V}_\perp &= \frac{4i}{3\pi}(k_1 - k_2)v_{1001} \cos 2\pi z,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}v_{1001} &= -\frac{6}{1250\pi}\left(\frac{9}{2} + \frac{11}{\mathcal{P}}\right), \\ \vartheta_{1001} &= -\frac{9\pi}{1250}\left(\frac{121}{2} + \frac{9}{\mathcal{P}}\right),\end{aligned}\tag{21}$$

$$\Phi_{1001} = e^{i(k_1 - k_2) \cdot X} \begin{pmatrix} \frac{4i}{3\pi}(k_1 - k_2)v_{1001} \cos 2\pi z \\ v_{1001} \sin 2\pi z \\ \vartheta_{1001} \sin 2\pi z \end{pmatrix}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned}2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{1001}) &= \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{ik_c x_1} \begin{pmatrix} \frac{i}{3}v_{1001} \cos \pi z (k_1 - k_2) \\ \frac{\pi}{4}v_{1001} \sin \pi z \end{pmatrix} \\ \frac{\pi}{4}\vartheta_{1001} e^{ik_c x_1} \sin \pi z \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{ik_c x_1} \begin{pmatrix} \frac{i}{3}v_{1001} \cos 3\pi z (k_2 - 7/3k_1) \\ -\frac{11\pi}{4}v_{1001} \sin 3\pi z \end{pmatrix} \\ -\frac{\pi}{4}(7\vartheta_{1001} + 18\pi^{\frac{3}{2}}v_{1001})e^{ik_c x_1} \sin 3\pi z \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Le calcul de  $\Phi_{1010} = e^{i(k_1 + k_2) \cdot X}(\widehat{V}_\perp, \widehat{V}_z, \widehat{\theta})(z)$  donne

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(D^2 - k_c^2)\widehat{V}_\perp + i(k_1 + k_2)\phi &= \frac{-i}{2}(1 - 3 \cos 2\pi z)(k_1 + k_2) \\ \mathcal{P}[(D^2 - k_c^2)\widehat{V}_z + \widehat{\theta}] + D\phi &= \frac{3\pi}{2} \sin 2\pi z \\ (D^2 - k_c^2)\widehat{\theta} + \mathcal{R}_c \widehat{V}_z &= \frac{2\mathcal{R}_c}{3\pi^2} \frac{3\pi}{2} \sin 2\pi z \\ i(k_1 + k_2) \cdot \widehat{V}_\perp + D\widehat{V}_z &= 0, \\ \widehat{V}_z &= D^2 \widehat{V}_z = \widehat{\theta} = 0 \text{ for } z = 0, 1,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\widehat{V}_z &= v_{1010} \sin 2\pi z, \\ \widehat{\theta} &= \vartheta_{1010} \sin 2\pi z, \\ \widehat{V}_\perp &= \frac{4i}{\pi}(k_1 + k_2)v_{1010} \cos 2\pi z,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}v_{1010} &= \frac{1}{26\pi}\left(\frac{3}{\mathcal{P}} - 1\right), \\ \vartheta_{1010} &= \frac{9\pi}{52}\left(\frac{1}{\mathcal{P}} - 9\right),\end{aligned}\tag{22}$$

$$\Phi_{1010} = e^{i(k_1 + k_2) \cdot X} \begin{pmatrix} \frac{4i}{\pi}(k_1 + k_2)v_{1010} \cos 2\pi z \\ v_{1010} \sin 2\pi z \\ \vartheta_{1010} \sin 2\pi z \end{pmatrix}.$$

Maintenant on a

$$\begin{aligned} 2\mathbf{R}(\overline{\zeta}_2, \Phi_{1010}) &= \left( \begin{array}{c} \Pi_0 e^{ik_c x_1} \left( \begin{array}{c} 3iv_{1010} \cos \pi z (k_1 + k_2) \\ \frac{3\pi}{2} v_{1010} \sin \pi z \end{array} \right) \\ \frac{3\pi}{4} \vartheta_{1010} e^{ik_c x_1} \sin \pi z \end{array} \right) \\ &+ \left( \begin{array}{c} \Pi_0 e^{ik_c x_1} \left( \begin{array}{c} -iv_{1010} \cos 3\pi z (5k_1 + 3k_2) \\ -\frac{9\pi}{4} v_{1010} \sin 3\pi z \end{array} \right) \\ -\frac{\pi}{4} (18\pi^2 v_{1010} + 5\vartheta_{1010}) e^{ik_c x_1} \sin 3\pi z \end{array} \right). \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \langle 2\mathbf{R}(\zeta_1, \Phi_{0011}), \zeta_1 \rangle &= -\frac{3\mathcal{P}}{4}, \\ \langle 2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{1001}), \zeta_1 \rangle &= \frac{7\pi}{24} v_{1001} + \frac{\mathcal{P}}{12\pi} \vartheta_{1001} \\ &= -\frac{1}{10000} (363\mathcal{P} + 117 + \frac{154}{\mathcal{P}}), \\ \langle 2\mathbf{R}(\overline{\zeta}_2, \Phi_{1010}), \zeta_1 \rangle &= \frac{9\pi}{4} v_{1010} + \frac{\mathcal{P}}{4\pi} \vartheta_{1010} \\ &= -\frac{81\mathcal{P}}{208} - \frac{9}{208} + \frac{27}{104\mathcal{P}}, \end{aligned}$$

$$\frac{3}{2}(1 + \mathcal{P})d = -\mathcal{P} \left( \frac{3}{4} + \frac{363}{10000} + \frac{81}{208} \right) - \frac{117}{10000} - \frac{9}{208} + \frac{1}{\mathcal{P}} \left( \frac{27}{104} - \frac{154}{10000} \right),$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \text{sgn}(b + 2d) &= \text{sgn}[-3.1014\mathcal{P}^2 - 0.1100\mathcal{P} + 0.4884] \\ \text{sgn}(b - d) &= \text{sgn}[0.4257\mathcal{P}^2 + 0.0550\mathcal{P} - 0.2442], \\ \text{sgn}(b + d) &= \text{sgn}[-1.0924\mathcal{P}^2 - 0.0550\mathcal{P} + 0.2442]. \end{aligned}$$

La racine positive du premier trinôme est 0.3795, celle du deuxième est 0.6956 et celle du troisième 0.4483. On en déduit les conclusions (12) et (14).

Le calcul du coefficient  $c$  nécessaire pour la détermination de la stabilité de l'une ou l'autre des solutions hexagonales est reporté en Appendice A.3. On trouve que  $c < 0$  pour  $\mathcal{P} \in (0.3795, 0.6956)$  ce qui implique

$$c(-1)^{k+1} > 0 \text{ pour } k = 0 \text{ et } < 0 \text{ pour } k = 1,$$

d'où la structure convective en hexagones est instable (faiblement) alors que la structure en triangles équilatéraux est stable.

## A Appendice

### A.1 Forme de l'équation réduite

Il s'agit de trouver la forme générale des champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^6$  (ou son complexifié) commutant avec les actions des symétries (10).

On doit vérifier notamment pour la composante de  $\zeta_1$

$$e^{ik_1 \cdot a} P(A, B, C, c.c.) = P(Ae^{ik_1 \cdot a}, Be^{ik_2 \cdot a}, Ce^{ik_3 \cdot a}, c.c.) \quad \forall a \in \mathbb{R}^2/\Gamma, \quad (23)$$

$$\overline{P}(A, B, C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = P(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, A, B, C) \quad (24)$$

$$-P(A, B, C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = P(-A, -B, -C, -\overline{A}, -\overline{B}, -\overline{C}). \quad (25)$$

On considère d'abord les termes du développement en série de Taylor de  $P$ . En étudiant les monômes  $A^p \overline{A}^{p'} B^q \overline{B}^{q'} C^r \overline{C}^{r'}$  on voit par (23) que seuls peuvent exister les monômes tels que

$$(p - p' - 1)k_1 + (q - q')k_2 + (r - r')k_3 = 0$$

et, tenant compte de

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0,$$

cela implique

$$p - p' - 1 = q - q' = r - r'.$$

Les seuls monômes possibles dans  $P_1$  sont donc

$$\begin{aligned} A|A|^{2p'}|B|^{2q'}|C|^{2r'}(ABC)^l, \quad l &\geq 0, \\ \overline{BC}(\overline{ABC})^{l'-1}|A|^{2p}|B|^{2q}|C|^{2r}, \quad l' &\geq 1. \end{aligned}$$

La propriété (25) implique

$$l \text{ pair}, \quad l' \text{ pair},$$

et la propriété (24) implique que les coefficients des monômes sont réels. Ainsi on a la première composante (facteur de  $\zeta_1$ ) de la forme

$$AP_1[|A|^2, |B|^2, |C|^2, (ABC)^2] + \overline{BC}(\overline{ABC})P_2[|A|^2, |B|^2, |C|^2, (\overline{ABC})^2].$$

Les composantes suivant  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$  s'obtiennent grâce à l'action de  $\mathbf{R}_{2\pi/3}$ , par permutation circulaire sur  $(A, B, C)$ . Ainsi la composante, facteur de  $\zeta_2$  s'écrit

$$BP_1[|B|^2, |C|^2, |A|^2, (ABC)^2] + \overline{CA}(\overline{ABC})P_2[|B|^2, |C|^2, |A|^2, (\overline{ABC})^2],$$

et la composante, facteur de  $\zeta_3$  s'écrit

$$CP_1[|C|^2, |A|^2, |B|^2, (ABC)^2] + \overline{AB}(\overline{ABC})P_2[|C|^2, |A|^2, |B|^2, (\overline{ABC})^2].$$

Enfin, la commutation avec la symétrie  $\mathbf{S}$  implique pour la première composante, la symétrie de  $P_1$  et  $P_2$  par rapport à  $(|B|^2, |C|^2)$  (puisque les coefficients sont réels)

$$\begin{aligned} P_1[|A|^2, |B|^2, |C|^2, (ABC)^2] &= P_1[|A|^2, |C|^2, |B|^2, (ABC)^2] \\ P_2[|A|^2, |B|^2, |C|^2, (\overline{ABC})^2] &= P_2[|A|^2, |C|^2, |B|^2, (\overline{ABC})^2]. \end{aligned}$$

Finalement on peut écrire les 3 facteurs de  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  sous la forme

$$\begin{aligned} AP_1[|A|^2, |B|^2 + |C|^2, |B|^2|C|^2, (ABC)^2] + & \quad (26) \\ + \overline{BC}(\overline{ABC})P_2[|A|^2, |B|^2 + |C|^2, |B|^2|C|^2, (\overline{ABC})^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BP_1[|B|^2, |C|^2 + |A|^2, |C|^2|A|^2, (ABC)^2] + & \quad (27) \\ + \overline{CA}(\overline{ABC})P_2[|B|^2, |C|^2 + |A|^2, |C|^2|A|^2, (\overline{ABC})^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CP_1[|C|^2, |A|^2 + |B|^2, |A|^2|B|^2, (ABC)^2] + & \quad (28) \\ + \overline{AB}(\overline{ABC})P_2[|C|^2, |A|^2 + |B|^2, |A|^2|B|^2, (\overline{ABC})^2], \end{aligned}$$

où les coefficients sont fonctions de  $\mu$ . En fait la réduction à une variété centrale ne donne pas l'analyticité du champ de vecteurs, ce qui rend impossible d'argumenter le raisonnement avec la forme du développement de Taylor. On peut néanmoins montrer que la forme particulière (26,27,28)

du champ de vecteurs réduit, est non seulement valide pour le développement de Taylor, mais aussi pour l'expression complète du champ de vecteurs. Pour montrer cela, on procède en plusieurs étapes :

i) on montre, en jouant sur l'imparité générale (25) et utilisant (23) avec

$$k_1 \cdot a = \pi, \quad k_2 \cdot a = \pi, \quad k_3 \cdot a = -2\pi,$$

puis

$$k_1 \cdot a = \pi, \quad k_3 \cdot a = \pi, \quad k_2 \cdot a = -2\pi,$$

que  $P$  est pair par rapport à  $(B, \overline{B})$ , et à  $(C, \overline{C})$  et impair par rapport à  $(A, \overline{A})$ .

ii) On définit ensuite  $P'_1$  par

$$\overline{A}P'_1(B, C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = P(0, B, C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}),$$

ainsi

$$P(A, B, C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) = AP_1(P(A, B, C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}) + \overline{A}P'_1(B, C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C})),$$

avec  $P_1$  et  $P_2$  pairs par rapport à  $(B, \overline{B})$ , et  $(C, \overline{C})$ ,  $P_1$  étant pair en  $(A, \overline{A})$  et  $P'_1$  pair en  $\overline{A}$ .

iii) On utilise alors (23) avec

$$k_1 \cdot a = -\theta_1, \quad k_2 \cdot a = -\theta_2, \quad k_3 \cdot a = \Theta - \theta_3,$$

puis avec

$$k_1 \cdot a = \Theta - \theta_1, \quad k_2 \cdot a = -\theta_2, \quad k_3 \cdot a = -\theta_3,$$

qui permet de montrer que

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1(r_1^2, r_2^2, r_3^2, (ABC)^2, (\overline{ABC})^2) \\ P'_1 &= (\overline{BC})^2 P_2(r_1^2, r_2^2, r_3^2, (\overline{ABC})^2), \end{aligned}$$

enfin, on note que l'argument  $(\overline{ABC})^2$  dans  $P_1$  peut être incorporé dans  $P'_1$ , d'où la forme finale (26,27,28) après utilisation de  $\mathbf{R}_{\pi/3}$  et  $\mathbf{S}$ .

## A.2 Solutions hexagonales et leurs stabilités

Les solutions hexagonales sont données aux ordres principaux par

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 = r_3 = r, \\ \theta_1 &= \theta_{10}, \quad \theta_2 = \theta_{20}, \quad \theta_3 = \theta_{30} \\ \theta_{10} + \theta_{20} + \theta_{30} &= \Theta = k\pi/2, \quad k = 0, 1, 2, 3, \\ a\mu + (b + 2d)r^2 + cr^4(-1)^k &= 0. \end{aligned} \tag{29}$$

L'opérateur linéarisé à l'ordre principal est alors

$$\begin{pmatrix} 2br^2 & 2dr^2 & 2dr^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2dr^2 & 2br^2 & 2dr^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2dr^2 & 2dr^2 & 2br^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2cr^4(-1)^k & -2cr^4(-1)^k & -2cr^4(-1)^k \\ 0 & 0 & 0 & -2cr^4(-1)^k & -2cr^4(-1)^k & -2cr^4(-1)^k \\ 0 & 0 & 0 & -2cr^4(-1)^k & -2cr^4(-1)^k & -2cr^4(-1)^k \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont

$$\begin{aligned} &2(b + 2d)r^2 \text{ simple} \\ &2(b - d)r^2 \text{ double} \\ &-6cr^4(-1)^k \text{ simple} \\ &0 \text{ double.} \end{aligned}$$

On remarque maintenant que toute solution de la forme (29) translatée de  $\delta$  devient

$$\theta'_j = \theta_j + \delta \cdot k_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

et

$$\Theta' = \Theta \text{ car } k_1 + k_2 + k_3 = 0.$$

Il en résulte qu'une translation appropriée peut notamment arriver à

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (0, 0, \Theta) \text{ ou } (\theta_1 - 2\pi/3, \theta_2 + 2\pi/3, \theta_3).$$

On note également que

$$(\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3) = (\theta_1 + 4\pi/3, \theta_2 + 2\pi/3, \theta_3)$$

correspond à  $\Theta' = \Theta + 2\pi$ , alors que  $\theta_1 + 4\pi/3 = \theta_1 - 2\pi/3 \pmod{2\pi}$ , d'où

$$\Theta + 2n\pi \sim \Theta.$$

Pour montrer que

$$\Theta = \pi \text{ est équivalent à } \Theta = 0,$$

on peut utiliser la symétrie  $S_z$  puisque  $S_z$  ajoute  $\pi$  à chaque phase  $\theta_j$ , ainsi

$$\{\Theta = \pi\} \stackrel{S_z}{\sim} \{\Theta = 4\pi\} \sim \{\Theta = 0\}.$$

Il en résulte que les cas  $\Theta = 0$ , ou  $\pi$  représentent le même pattern.

Pour montrer que

$$\Theta = \pi/2 \text{ est équivalent à } \Theta = 3\pi/2,$$

on utilise la symétrie  $R_\pi$  :

$$\{\Theta = 3\pi/2\} \stackrel{R_\pi}{\sim} \{\Theta = -3\pi/2\} \sim \{\Theta = \pi/2\}.$$

Il en résulte que les cas  $\Theta = \pi/2$ , ou  $3\pi/2$  représentent le même pattern.

### A.3 Calculs aux ordres supérieurs

Nous devons identifier les monômes  $A^p \bar{A}^{p'} B^q \bar{B}^{q'} C^r \bar{C}^{r'}$  dans l'identité (9) en utilisant la forme (15) de  $dU_0/dt$  pour  $\mu = 0$ , avec les coefficients qui apparaissent dans (16).

Nous avons déjà calculé

$$\begin{aligned} \Phi_{200000} &= \Phi_{2000} = 0 \\ \Phi_{110000} &= \Phi_{1100} = \widehat{\Phi}_{1100}(z) \\ \Phi_{001100} &= \Phi_{0011} = \widehat{\Phi}_{1100}(z) \\ \Phi_{100100} &= \Phi_{1001} = e^{i(k_1 - k_2) \cdot X} \widehat{\Phi}_{1001}(z) \\ \Phi_{101000} &= \Phi_{1010} = e^{i(k_1 + k_2) \cdot X} \widehat{\Phi}_{1010}(z). \end{aligned}$$

On obtient facilement tous les coefficients de monômes quadratiques :

$$\begin{aligned} \Phi_{000011} &= \widehat{\Phi}_{1100}(z), \\ \Phi_{002000} &= \Phi_{000020} = 0, \\ \Phi_{100001} &= e^{i(k_1 - k_3) \cdot X} \begin{pmatrix} \frac{4i}{3\pi}(k_1 - k_3)v_{1001} \cos 2\pi z \\ v_{1001} \sin 2\pi z \\ \vartheta_{1001} \sin 2\pi z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{100010} &= e^{i(k_1+k_3)\cdot X} \begin{pmatrix} \frac{4i}{\pi}(k_1+k_3)v_{1010} \cos 2\pi z \\ v_{1010} \sin 2\pi z \\ \vartheta_{1010} \sin 2\pi z \end{pmatrix}, \\ \Phi_{001010} &= e^{i(k_2+k_3)\cdot X} \begin{pmatrix} \frac{4i}{\pi}(k_2+k_3)v_{1010} \cos 2\pi z \\ v_{1010} \sin 2\pi z \\ \vartheta_{1010} \sin 2\pi z \end{pmatrix}, \\ \Phi_{001001} &= e^{i(k_2-k_3)\cdot X} \begin{pmatrix} \frac{4i}{3\pi}(k_2-k_3)v_{1001} \cos 2\pi z \\ v_{1001} \sin 2\pi z \\ \vartheta_{1001} \sin 2\pi z \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On a besoin des coefficients d'ordre cubique suivants

$$\Phi_{102000}, \Phi_{100020}, \Phi_{002010}, \Phi_{001020}, \Phi_{101010}$$

donnés en résolvant

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{102000} + 2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{101000}) &= 0 \\ \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{100020} + 2\mathbf{R}(\zeta_3, \Phi_{100010}) &= 0 \\ \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{002010} + 2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{001010}) &= 0 \\ \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{001020} + 2\mathbf{R}(\zeta_3, \Phi_{001010}) &= 0\end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{101010} + 2\mathbf{R}(\zeta_1, \Phi_{001010}) + 2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{100010}) + 2\mathbf{R}(\zeta_3, \Phi_{101000}) = 0.$$

Ensuite il faut calculer

$$\Phi_{002020}, \Phi_{101020}, \Phi_{102010}$$

en résolvant

$$\mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{002020} + \mathbf{R}(\Phi_{001010}, \Phi_{001010}) + 2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{001020}) + 2\mathbf{R}(\zeta_3, \Phi_{002010}) = 0,$$

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{101020} + 2\mathbf{R}(\Phi_{100010}, \Phi_{001010}) + 2\mathbf{R}(\zeta_1, \Phi_{001020}) + \\ &+ 2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{100020}) + 2\mathbf{R}(\zeta_3, \Phi_{101010}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \Phi_{102010} + 2\mathbf{R}(\Phi_{101000}, \Phi_{001010}) + 2\mathbf{R}(\zeta_1, \Phi_{002010}) + \\ &+ 2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{101010}) + 2\mathbf{R}(\zeta_3, \Phi_{102000}).\end{aligned}$$

Enfin le coefficient  $c$  qui détermine la stabilité des solutions hexagonales se déduit par le produit scalaire de l'expression suivante avec  $\zeta_1$  (où  $\overline{\Phi_{102020}}$  disparaît)

$$\begin{aligned}c\zeta_1 &= \mathbf{L}_{\mathcal{R}_c} \overline{\Phi_{102020}} + 2\mathbf{R}(\overline{\zeta_1}, \overline{\Phi_{002020}}) + 2\mathbf{R}(\overline{\zeta_2}, \overline{\Phi_{101020}}) + \\ &+ 2\mathbf{R}(\overline{\zeta_3}, \overline{\Phi_{102010}}) + 2\mathbf{R}(\overline{\Phi_{101000}}, \overline{\Phi_{001020}}) + \\ &+ 2\mathbf{R}(\overline{\Phi_{100010}}, \overline{\Phi_{002010}}) + 2\mathbf{R}(\overline{\Phi_{001010}}, \overline{\Phi_{101010}}).\end{aligned}\tag{30}$$

### A.3.1 Calcul de $\Phi_{102000}$

On a

$$\Phi_{102000} = e^{i(k_1+2k_2)\cdot X} \widehat{\Phi}_{102000}(z)$$

$$\begin{aligned}
-2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{101000}) &= \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{i(k_1+2k_2)\cdot X} \begin{pmatrix} -iv_{1010}(5k_1+7k_2)\cos\pi z \\ -\frac{\pi}{4}v_{1010}\sin\pi z \end{pmatrix} \\ \left(\frac{9\pi^3}{2}v_{1010} - \frac{5\pi}{4}\vartheta_{1010}\right)e^{i(k_1+2k_2)\cdot X}\sin\pi z \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{i(k_1+2k_2)\cdot X} \begin{pmatrix} 3iv_{1010}(k_1+k_2)\cos 3\pi z \\ \frac{3\pi}{4}v_{1010}\sin 3\pi z \end{pmatrix} \\ \frac{3\pi}{4}\vartheta_{1010}e^{i(k_1+2k_2)\cdot X}\sin 3\pi z \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ainsi  $\widehat{\Phi}_{102000}(z) = (\widehat{V}_\perp, \widehat{V}_z, \widehat{\theta})$  satisfait le système

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(D^2 - 3k_c^2)\widehat{V}_\perp + i(k_1 + 2k_2)\phi &= -iv_{1010}(5k_1 + 7k_2)\cos\pi z \\
&\quad + 3iv_{1010}(k_1 + k_2)\cos 3\pi z, \\
\mathcal{P}[(D^2 - 3k_c^2)\widehat{V}_z + \widehat{\theta}] + D\phi &= -\frac{\pi}{4}v_{1010}\sin\pi z + \frac{3\pi}{4}v_{1010}\sin 3\pi z, \\
(D^2 - 3k_c^2)\widehat{\theta} + \frac{27\pi^4}{4}\widehat{V}_z &= \left(\frac{9\pi^3}{2}v_{1010} - \frac{5\pi}{4}\vartheta_{1010}\right)\sin\pi z + \\
&\quad \frac{3\pi}{4}\vartheta_{1010}\sin 3\pi z, \\
i(k_1 + 2k_2) \cdot \widehat{V}_\perp + D\widehat{V}_z &= 0
\end{aligned}$$

avec les conditions aux limites usuelles. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\widehat{V}_z &= A_{1020}\sin\pi z + B_{1020}\sin 3\pi z \\
\widehat{\theta} &= C_{1020}\sin\pi z + D_{1020}\sin 3\pi z, \\
\phi &= E_{1020}\cos\pi z + F_{1020}\cos 3\pi z, \\
\widehat{V}_\perp &= iG_{1020}\cos\pi z + iH_{1020}\cos 3\pi z,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_{1020} &= \frac{1}{22\pi^2}\left(\frac{5 \times 45}{4\mathcal{P}} - 27\right)\pi v_{1010} + \frac{15}{44}\frac{\vartheta_{1010}}{\pi^3}, \\
C_{1020} &= \frac{1}{88}\left(\left(\frac{27 \times 45}{2\mathcal{P}} - 18 \times 25\right)\pi v_{1010} + 125\frac{\vartheta_{1010}}{\pi}\right), \\
B_{1020} &= -\frac{1}{1020\pi^2}\left(\frac{147}{2\mathcal{P}}\pi v_{1010} + \frac{\vartheta_{1010}}{\pi}\right), \\
D_{1020} &= -\frac{1}{2040}\left(\frac{189}{2\mathcal{P}}\pi v_{1010} + 147\frac{\vartheta_{1010}}{\pi}\right), \\
E_{1020} &= \frac{\mathcal{P}}{22\pi}\left[\left(\frac{67}{4\mathcal{P}} - 45\right)\pi v_{1010} + \frac{25}{2}\frac{\vartheta_{1010}}{\pi}\right], \\
F_{1020} &= \frac{\mathcal{P}}{340\pi}\left(-\frac{9}{2\mathcal{P}}\pi v_{1010} - \frac{7\vartheta_{1010}}{\pi}\right), \\
G_{1020} &= \frac{2}{55\pi^3}\left(\frac{25}{4}(k_1 + 2k_2)\frac{\vartheta_{1010}}{\pi} + \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(\frac{507}{8\mathcal{P}} - \frac{45}{2}\right)k_1 + \left(\frac{375}{4\mathcal{P}} - 45\right)k_2\right]\pi v_{1010}\right), \\
H_{1020} &= \frac{1}{170\pi^3}\left(-\left(\frac{683}{14}k_1 + 49k_2\right)\frac{\pi v_{1010}}{\mathcal{P}} - \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2)\frac{\vartheta_{1010}}{\pi}\right),
\end{aligned}$$

où on doit remplacer  $v_{1010}$  et  $\vartheta_{1010}$  par les expressions (22). On vérifie que

$$\nabla \cdot \Phi_{102000} = 0$$

car

$$\begin{aligned} -(k_1 + 2k_2) \cdot G_{1020} + \pi A_{1020} &= 0, \\ -(k_1 + 2k_2) \cdot H_{1020} + 3\pi B_{1020} &= 0. \end{aligned}$$

### A.3.2 Calcul de $\Phi_{100020}$

On a

$$\begin{aligned} \Phi_{100020} &= e^{i(k_1+2k_3) \cdot X} \widehat{\Phi}_{100020}(z) \\ -2\mathbf{R}(\zeta_3, \Phi_{100010}) &= \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{i(k_1+2k_3) \cdot X} \begin{pmatrix} -iv_{1010}(5k_1 + 7k_3) \cos \pi z \\ -\frac{\pi}{4} v_{1010} \sin \pi z \end{pmatrix} \\ \left( \frac{9\pi^3}{2} v_{1010} - \frac{5\pi}{4} \vartheta_{1010} \right) e^{i(k_1+2k_3) \cdot X} \sin \pi z \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{i(k_1+2k_3) \cdot X} \begin{pmatrix} 3iv_{1010}(k_1 + k_3) \cos 3\pi z \\ \frac{3\pi}{4} v_{1010} \sin 3\pi z \end{pmatrix} \\ \frac{3\pi}{4} \vartheta_{1010} e^{i(k_1+2k_3) \cdot X} \sin 3\pi z \end{pmatrix}, \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ainsi  $\widehat{\Phi}_{100020}(z) = (\widehat{V}_\perp, \widehat{V}_z, \widehat{\theta})$  satisfait le système

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(D^2 - 3k_c^2) \widehat{V}_\perp + i(k_1 + 2k_3) \phi &= -iv_{1010}(5k_1 + 7k_3) \cos \pi z \\ &\quad + 3iv_{1010}(k_1 + k_3) \cos 3\pi z, \\ \mathcal{P}[(D^2 - 3k_c^2) \widehat{V}_z + \widehat{\theta}] + D\phi &= -\frac{\pi}{4} v_{1010} \sin \pi z + \frac{3\pi}{4} v_{1010} \sin 3\pi z, \\ (D^2 - 3k_c^2) \widehat{\theta} + \frac{27\pi^4}{4} \widehat{V}_z &= \left( \frac{9\pi^3}{2} v_{1010} - \frac{5\pi}{4} \vartheta_{1010} \right) \sin \pi z + \\ &\quad \frac{3\pi}{4} \vartheta_{1010} \sin 3\pi z, \\ i(k_1 + 2k_3) \cdot \widehat{V}_\perp + D\widehat{V}_z &= 0 \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites usuelles. On arrive ainsi à un système identique au système obtenu pour  $\widehat{V}_z, \widehat{\theta}, \phi$  dans  $\widehat{\Phi}_{102000}$ , et

$$\begin{aligned} \widehat{V}_z &= A_{1020} \sin \pi z + B_{1020} \sin 3\pi z \\ \widehat{\theta} &= C_{1020} \sin \pi z + D_{1020} \sin 3\pi z, \\ \phi &= E_{1020} \cos \pi z + F_{1020} \cos 3\pi z, \\ \widehat{V}_\perp &= iG_{100020} \cos \pi z + iH_{100020} \cos 3\pi z, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} G_{100020} &= \frac{2}{55\pi^3} \left( \frac{25}{4} (k_1 + 2k_3) \frac{\vartheta_{1010}}{\pi} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \frac{507}{8\mathcal{P}} - \frac{45}{2} \right) k_1 + \left( \frac{375}{4\mathcal{P}} - 45 \right) k_3 \right] \pi v_{1010} \right), \\ H_{100020} &= \frac{1}{170\pi^3} \left( -\left( \frac{683}{14} k_1 + 49k_3 \right) \frac{\pi v_{1010}}{\mathcal{P}} - \frac{1}{3} (k_1 + 2k_3) \frac{\vartheta_{1010}}{\pi} \right). \end{aligned}$$

### A.3.3 Calcul de $\Phi_{002010}$

On a

$$\begin{aligned} \Phi_{002010} &= e^{i(2k_2+k_3)\cdot X} \widehat{\Phi}_{002010}(z) \\ -2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{001010}) &= \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{i(2k_2+k_3)\cdot X} \begin{pmatrix} -iv_{1010}(5k_3+7k_2) \cos \pi z \\ -\frac{\pi}{4} v_{1010} \sin \pi z \end{pmatrix} \\ \left(\frac{9\pi^3}{2} v_{1010} - \frac{5\pi}{4} \vartheta_{1010}\right) e^{i(2k_2+k_3)\cdot X} \sin \pi z \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{i(2k_2+k_3)\cdot X} \begin{pmatrix} 3iv_{1010}(k_2+k_3) \cos 3\pi z \\ \frac{3\pi}{4} v_{1010} \sin 3\pi z \end{pmatrix} \\ \frac{3\pi}{4} \vartheta_{1010} e^{i(2k_2+k_3)\cdot X} \sin 3\pi z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

On arrive ainsi à

$$\widehat{\Phi}_{002010}(z) = (\widehat{V}_\perp, \widehat{V}_z, \widehat{\theta})$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{V}_z &= A_{1020} \sin \pi z + B_{1020} \sin 3\pi z \\ \widehat{\theta} &= C_{1020} \sin \pi z + D_{1020} \sin 3\pi z, \\ \phi &= E_{1020} \cos \pi z + F_{1020} \cos 3\pi z, \\ \widehat{V}_\perp &= iG_{002010} \cos \pi z + iH_{002010} \cos 3\pi z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{002010} &= \frac{2}{55\pi^3} \left( \frac{25}{4} (k_3 + 2k_2) \frac{\vartheta_{1010}}{\pi} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left( \frac{507}{8\mathcal{P}} - \frac{45}{2} \right) k_3 + \left( \frac{375}{4\mathcal{P}} - 45 \right) k_2 \right] \pi v_{1010} \right), \\ H_{002010} &= \frac{1}{170\pi^3} \left( - \left( \frac{683}{14} k_3 + 49k_2 \right) \frac{\pi v_{1010}}{\mathcal{P}} - \frac{1}{3} (k_3 + 2k_2) \frac{\vartheta_{1010}}{\pi} \right). \end{aligned}$$

### A.3.4 Calcul de $\Phi_{001020}$

On a

$$\begin{aligned} \Phi_{001020} &= e^{i(k_2+2k_3)\cdot X} \widehat{\Phi}_{001020}(z) \\ -2\mathbf{R}(\zeta_3, \Phi_{001010}) &= \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{i(k_2+2k_3)\cdot X} \begin{pmatrix} -iv_{1010}(5k_2+7k_3) \cos \pi z \\ -\frac{\pi}{4} v_{1010} \sin \pi z \end{pmatrix} \\ \left(\frac{9\pi^3}{2} v_{1010} - \frac{5\pi}{4} \vartheta_{1010}\right) e^{i(k_2+2k_3)\cdot X} \sin \pi z \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{i(k_2+2k_3)\cdot X} \begin{pmatrix} 3iv_{1010}(k_2+k_3) \cos 3\pi z \\ \frac{3\pi}{4} v_{1010} \sin 3\pi z \end{pmatrix} \\ \frac{3\pi}{4} \vartheta_{1010} e^{i(k_2+2k_3)\cdot X} \sin 3\pi z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

On arrive ainsi à

$$\widehat{\Phi}_{001020}(z) = (\widehat{V}_\perp, \widehat{V}_z, \widehat{\theta})$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{V}_z &= A_{1020} \sin \pi z + B_{1020} \sin 3\pi z \\ \widehat{\theta} &= C_{1020} \sin \pi z + D_{1020} \sin 3\pi z, \\ \phi &= E_{1020} \cos \pi z + F_{1020} \cos 3\pi z, \\ \widehat{V}_\perp &= iG_{001020} \cos \pi z + iH_{001020} \cos 3\pi z, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
G_{001020} &= \frac{2}{55\pi^3} \left( \frac{25}{4}(k_2 + 2k_3) \frac{\vartheta_{1010}}{\pi} + \right. \\
&\quad \left. + [(\frac{507}{8\mathcal{P}} - \frac{45}{2})k_2 + (\frac{375}{4\mathcal{P}} - 45)k_3] \pi v_{1010} \right), \\
H_{001020} &= \frac{1}{170\pi^3} \left( -(\frac{683}{14}k_2 + 49k_3) \frac{\pi v_{1010}}{\mathcal{P}} - \frac{1}{3}(k_2 + 2k_3) \frac{\vartheta_{1010}}{\pi} \right).
\end{aligned}$$

### A.3.5 Calcul de $\Phi_{101010}$

On a

$$\begin{aligned}
\Phi_{101010} &= \widehat{\Phi}_{101010}(z) \\
-2\mathbf{R}(\zeta_1, \Phi_{001010}) &= \begin{pmatrix} \Pi_0 \begin{pmatrix} -ik_1 v_{1010} (\cos \pi z - \cos 3\pi z) \\ -\pi v_{1010} (\sin \pi z - 3 \sin 3\pi z) \end{pmatrix} \\ -\frac{\pi}{2} (\sin \pi z - 3 \sin 3\pi z) (\frac{9\pi^2}{2} v_{1010} + \vartheta_{1010}) \end{pmatrix}, \\
-2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{100010}) &= \begin{pmatrix} \Pi_0 \begin{pmatrix} -ik_2 v_{1010} (\cos \pi z - \cos 3\pi z) \\ -\pi v_{1010} (\sin \pi z - 3 \sin 3\pi z) \end{pmatrix} \\ -\frac{\pi}{2} (\sin \pi z - 3 \sin 3\pi z) (\frac{9\pi^2}{2} v_{1010} + \vartheta_{1010}) \end{pmatrix}, \\
-2\mathbf{R}(\zeta_3, \Phi_{101000}) &= \begin{pmatrix} \Pi_0 \begin{pmatrix} -ik_3 v_{1010} (\cos \pi z - \cos 3\pi z) \\ -\pi v_{1010} (\sin \pi z - 3 \sin 3\pi z) \end{pmatrix} \\ -\frac{\pi}{2} (\sin \pi z - 3 \sin 3\pi z) (\frac{9\pi^2}{2} v_{1010} + \vartheta_{1010}) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ainsi  $\widehat{\Phi}_{101010}(z) = (\widehat{V}_\perp, \widehat{V}_z, \widehat{\theta})$  satisfait le système

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}D^2\widehat{V}_\perp &= 0 \\
\mathcal{P}[D^2\widehat{V}_z + \widehat{\theta}] + D\phi &= -3\pi v_{1010} (\sin \pi z - 3 \sin 3\pi z) \\
D^2\widehat{\theta} + \frac{27\pi^4}{4}\widehat{V}_z &= -\frac{3\pi}{2} (\sin \pi z - 3 \sin 3\pi z) (\frac{9\pi^2}{2} v_{1010} + \vartheta_{1010}) \\
D\widehat{V}_z &= 0,
\end{aligned}$$

avec les conditions aux limites usuelles. On en déduit

$$\begin{aligned}
\widehat{V}_\perp &= 0, \quad \widehat{V}_z = 0, \\
\widehat{\theta} &= C_{101010} \sin \pi z + D_{101010} \sin 3\pi z, \\
C_{101010} &= \frac{3}{2\pi} (\frac{9\pi^2}{2} v_{1010} + \vartheta_{1010}), \\
D_{101010} &= -\frac{1}{2\pi} (\frac{9\pi^2}{2} v_{1010} + \vartheta_{1010}).
\end{aligned}$$

### A.3.6 Calcul de $\Phi_{002020}$

On a

$$\begin{aligned}
\Phi_{002020} &= e^{-2ik_1 \cdot X} \widehat{\Phi}_{002020}(z) \\
-\mathbf{R}(\Phi_{001010}, \Phi_{001010}) &= \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{-2ik_1 \cdot X} \begin{pmatrix} 8ik_1 v_{1010}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$-2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{001020}) = \left( \begin{array}{c} \Pi_0 e^{-2ik_1 \cdot X} \left( \begin{array}{c} i\alpha_{0102} + i\alpha_{2102} \cos 2\pi z + i\alpha_{4102} \cos 4\pi z \\ \beta_2 \sin 2\pi z + \beta_4 \sin 4\pi z \end{array} \right) \\ e^{-2ik_1 \cdot X} (\gamma_2 \sin 2\pi z + \gamma_4 \sin 4\pi z) \end{array} \right),$$

$$\begin{aligned} \alpha_{0102} &= -k_2 \left[ \frac{3}{10\pi\mathcal{P}} v_{1010} + A_{1020} \right] - \frac{\pi}{2} G_{001020}, \\ \alpha_{2102} &= k_2 \left[ -\frac{8}{35\pi\mathcal{P}} v_{1010} + A_{1020} - B_{1020} \right] + \frac{\pi}{2} G_{001020} - \frac{3\pi}{2} H_{001020}, \\ \alpha_{4102} &= k_2 \left( \frac{v_{1010}}{14\pi\mathcal{P}} + B_{1020} \right) + \frac{3\pi}{2} H_{001020}, \\ \beta_2 &= \pi(A_{1020} - B_{1020}) - \frac{13}{70\mathcal{P}} v_{1010}, \\ \beta_4 &= 2\pi B_{1020} + \frac{1}{28\mathcal{P}} v_{1010}, \\ \gamma_2 &= -\frac{117\pi^2}{140\mathcal{P}} v_{1010} + \frac{9\pi^3}{4} (A_{1020} + B_{1020}) + \frac{\pi}{2} (C_{1020} - 3D_{1020}), \\ \gamma_4 &= \frac{9\pi^2}{56\mathcal{P}} v_{1010} + \frac{3\pi}{2} D_{1020} + \frac{9\pi^3}{4} B_{1020}. \end{aligned}$$

$$-2\mathbf{R}(\zeta_3, \Phi_{002010}) = \left( \begin{array}{c} \Pi_0 e^{-2ik_1 \cdot X} \left( \begin{array}{c} i\alpha_{0201} + i\alpha_{2201} \cos 2\pi z + i\alpha_{4201} \cos 4\pi z \\ \beta_2 \sin 2\pi z + \beta_4 \sin 4\pi z \end{array} \right) \\ e^{-2ik_1 \cdot X} (\gamma_2 \sin 2\pi z + \gamma_4 \sin 4\pi z) \end{array} \right),$$

$$\begin{aligned} \alpha_{0201} &= -k_3 \left[ \frac{3}{10\pi\mathcal{P}} v_{1010} + A_{1020} \right] - \frac{\pi}{2} G_{002010}, \\ \alpha_{2201} &= k_3 \left[ -\frac{8}{35\pi\mathcal{P}} v_{1010} + A_{1020} - B_{1020} \right] + \frac{\pi}{2} G_{002010} - \frac{3\pi}{2} H_{002010}, \\ \alpha_{4201} &= k_3 \left( \frac{v_{1010}}{14\pi\mathcal{P}} + B_{1020} \right) + \frac{3\pi}{2} H_{002010}. \end{aligned}$$

On arrive ainsi à

$$\widehat{\Phi}_{002020}(z) = (\widehat{V}_\perp, \widehat{V}_z, \widehat{\theta})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(D^2 - 4k_c^2)\widehat{V}_\perp - 2ik_1\phi &= ik_1(\delta_0 + \delta_2 \cos 2\pi z + \delta_4 \cos 4\pi z), \\ \mathcal{P}[(D^2 - 4k_c^2)\widehat{V}_z + \widehat{\theta}] + D\phi &= 2\beta_2 \sin 2\pi z + 2\beta_4 \sin 4\pi z, \\ (D^2 - 4k_c^2)\widehat{\theta} + \frac{27\pi^4}{4}\widehat{V}_z &= 2\gamma_2 \sin 2\pi z + 2\gamma_4 \sin 4\pi z, \\ -2ik_1 \cdot \widehat{V}_\perp + D\widehat{V}_z &= 0, \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites usuelles, et

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 8v_{1010}^2 + \left( \frac{225}{88\mathcal{P}} - \frac{27}{22} \right) \frac{v_{1010}}{\pi} + \frac{15}{88} \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^3} - A_{1020}, \\ \delta_2 &= \left( \frac{27}{22} - \frac{22849}{6545\mathcal{P}} \right) \frac{v_{1010}}{\pi} - \frac{327}{935} \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^3} - A_{1020} + B_{1020}, \\ \delta_4 &= \frac{3767}{4760} \frac{v_{1010}}{\pi\mathcal{P}} + \frac{3}{340} \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^3} - B_{1020}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \widehat{V}_\perp &= -\frac{2ik_1}{\pi} (A_{002020} \cos 2\pi z + 2B_{002020} \cos 4\pi z) \\ \widehat{V}_z &= A_{002020} \sin 2\pi z + B_{002020} \sin 4\pi z \\ \widehat{\theta} &= C_{002020} \sin 2\pi z + D_{002020} \sin 4\pi z, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_{002020} &= \frac{1}{135\pi^2} \left( \frac{8}{\mathcal{P}} \pi \delta_2 - \frac{8}{3\pi^2} \gamma_2 - \frac{16}{\mathcal{P}} \beta_2 \right), \\
C_{002020} &= \frac{1}{45} \left( \frac{3}{\mathcal{P}} \pi \delta_2 - \frac{16}{\pi^2} \gamma_2 - \frac{6}{\mathcal{P}} \beta_2 \right), \\
B_{002020} &= \frac{2}{815\pi^2} \left( \frac{16}{3\mathcal{P}} \pi \delta_4 - \frac{4}{27\pi^2} \gamma_4 - \frac{1}{3\mathcal{P}} \beta_4 \right), \\
D_{002020} &= \frac{1}{815} \left( \frac{4}{\mathcal{P}} \pi \delta_4 - \frac{272}{3\pi^2} \gamma_4 - \frac{2}{\mathcal{P}} \beta_4 \right).
\end{aligned}$$

### A.3.7 Calcul de $\Phi_{101020}$

On a

$$\begin{aligned}
\Phi_{101020} &= e^{ik_3 \cdot X} \widehat{\Phi}_{101020}(z) \\
-2\mathbf{R}(\Phi_{100010}, \Phi_{001010}) &= \left( \begin{array}{c} \Pi_0 e^{ik_3 \cdot X} \left( \begin{array}{c} 2ik_3 v_{1010}^2 (-1 + 3 \cos 4\pi z) \\ 3\pi v_{1010}^2 \sin 4\pi z \end{array} \right) \\ 3\pi v_{1010} \vartheta_{1010} e^{ik_3 \cdot X} \sin 4\pi z \end{array} \right), \\
-2\mathbf{R}(\zeta_1, \Phi_{001020}) &= \left( \begin{array}{c} \Pi_0 e^{ik_3 \cdot X} \left( \begin{array}{c} i(\alpha_{0102} + \alpha_{2102} \cos 2\pi z + \alpha_{4102} \cos 4\pi z) \\ \beta'_2 \sin 2\pi z + \beta'_4 \sin 4\pi z \end{array} \right) \\ e^{ik_3 \cdot X} (\gamma'_2 \sin 2\pi z + \gamma'_4 \sin 4\pi z) \end{array} \right), \\
\alpha_{0102} &= \frac{\pi}{4} G_{001020} - k_1 [A_{1020} + \frac{1}{\pi} (k_1 \cdot G_{001020})], \\
\alpha_{2102} &= \frac{5\pi}{4} G_{001020} - \frac{3\pi}{4} H_{001020} \\
&\quad + k_1 [A_{1020} - B_{1020} - \frac{1}{\pi} (k_1 \cdot G_{001020} + k_1 \cdot H_{001020})], \\
\alpha_{4102} &= \frac{9\pi}{4} H_{001020} + k_1 [B_{1020} - \frac{1}{\pi} (k_1 \cdot H_{001020})], \\
k_1 \cdot G_{001020} &= -\frac{1}{220} \left[ \frac{75}{2} \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2} + \left( \frac{1257}{4\mathcal{P}} - 135 \right) v_{1010} \right], \\
k_1 \cdot H_{001020} &= \frac{1}{680} \left[ \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2} + \frac{1369}{14\mathcal{P}} v_{1010} \right], \\
\beta'_2 &= \frac{7\pi}{4} A_{1020} - \frac{\pi}{4} B_{1020} - \frac{1}{2} (k_1 \cdot G_{001020} - k_1 \cdot H_{001020}), \\
\beta'_4 &= \frac{11\pi}{4} B_{1020} - \frac{1}{2} k_1 \cdot H_{001020}, \\
\gamma'_2 &= \frac{9\pi^3}{4} (A_{1020} + B_{1020}) + \frac{5\pi}{4} C_{1020} - \frac{3\pi}{4} D_{1020} \\
&\quad - \frac{9\pi^2}{4} (k_1 \cdot G_{001020} - k_1 \cdot H_{001020}), \\
\gamma'_4 &= \frac{9\pi^3}{4} B_{1020} + \frac{9\pi}{4} D_{1020} - \frac{9\pi^2}{4} k_1 \cdot H_{001020}. \\
-2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{100020}) &= \left( \begin{array}{c} \Pi_0 e^{ik_3 \cdot X} \left( \begin{array}{c} i(\alpha_{0020} + \alpha_{2020} \cos 2\pi z + \alpha_{4020} \cos 4\pi z) \\ \beta'_2 \sin 2\pi z + \beta'_4 \sin 4\pi z \end{array} \right) \\ e^{ik_3 \cdot X} (\gamma'_2 \sin 2\pi z + \gamma'_4 \sin 4\pi z) \end{array} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{0020} &= \frac{\pi}{4}G_{100020} - k_2[A_{1020} + \frac{1}{\pi}(k_1 \cdot G_{001020})], \\
\alpha_{2020} &= \frac{5\pi}{4}G_{100020} - \frac{3\pi}{4}H_{100020} \\
&\quad + k_2[A_{1020} - B_{1020} - \frac{1}{\pi}(k_1 \cdot G_{001020} + k_1 \cdot H_{001020})], \\
\alpha_{4020} &= \frac{9\pi}{4}H_{100020} + k_2[B_{1020} - \frac{1}{\pi}(k_1 \cdot H_{001020})],
\end{aligned}$$

où on remarque que

$$\begin{aligned}
k_1 \cdot G_{001020} &= k_2 \cdot G_{100020}, \\
k_1 \cdot H_{001020} &= k_2 \cdot H_{100020}.
\end{aligned}$$

$$-2\mathbf{R}(\zeta_3, \Phi_{101010}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{ik_3 \cdot X}(\gamma_2'' \sin 2\pi z) + \gamma_4'' \sin 4\pi z \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2'' &= \frac{\pi}{2}(C_{101010} - 3D_{101010}) = \frac{3}{2}\left(\frac{9\pi^2}{2}v_{1010} + \vartheta_{1010}\right), \\
\gamma_4'' &= \frac{3\pi}{2}D_{101010} = -\frac{3}{4}\left(\frac{9\pi^2}{2}v_{1010} + \vartheta_{1010}\right).
\end{aligned}$$

Il en résulte que le système pour  $\widehat{\Phi}_{101020}(z) = (\widehat{V}_\perp, \widehat{V}_z, \widehat{\theta})$  s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(D^2 - k_c^2)\widehat{V}_\perp + ik_3\phi &= ik_3(\delta'_0 + \delta'_2 \cos 2\pi z + \delta'_4 \cos 4\pi z), \\
\mathcal{P}[(D^2 - k_c^2)\widehat{V}_z + \widehat{\theta}] + D\phi &= 2\beta'_2 \sin 2\pi z + (3\pi v_{1010}^2 + 2\beta'_4) \sin 4\pi z, \\
(D^2 - k_c^2)\widehat{\theta} + \frac{27\pi^4}{4}\widehat{V}_z &= (2\gamma'_2 + \gamma_2'') \sin 2\pi z + (3\pi v_{1010} \vartheta_{1010} + (2\gamma'_4 + \gamma_4'') \sin 4\pi z, \\
ik_3 \cdot \widehat{V}_\perp + D\widehat{V}_z &= 0,
\end{aligned}$$

avec les conditions aux limites usuelles, et

$$\begin{aligned}
k_3\delta'_2 &= \alpha_{2102} + \alpha_{2020} \\
&= \frac{5\pi}{4}(G_{001020} + G_{100020}) - \frac{3\pi}{4}(H_{001020} + H_{100020}) \\
&\quad - k_3(A_{1020} - B_{1020}) + \frac{k_3}{\pi}(k_1 \cdot G_{001020} + k_1 \cdot H_{001020}),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{5\pi}{4}(G_{001020} + G_{100020}) &= \frac{3k_3}{44\pi} \left[ \frac{25}{2} \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2} + \left( \frac{331}{4\mathcal{P}} - 45 \right) v_{1010} \right], \\
-\frac{3\pi}{4}(H_{001020} + H_{100020}) &= \frac{3k_3}{4 \times 170\pi} \left( \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2} + \frac{683}{14\mathcal{P}} v_{1010} \right), \\
\frac{k_3}{\pi}(k_1 \cdot G_{001020} + k_1 \cdot H_{001020}) &= \frac{k_3}{44\pi} \left[ -\frac{632}{170} \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2} + \left( 27 - \frac{82321}{1190\mathcal{P}} \right) v_{1010} \right], \\
-k_3(A_{1020} - B_{1020}) &= -\frac{k_3}{22\pi} \left( \frac{191789}{170\mathcal{P}} + 27 \right) v_{1010} - \frac{k_3}{4\pi} \frac{4067}{61710} \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\widehat{V}_\perp &= ik_3 \left( \frac{4}{\pi} A_{101020} \cos 2\pi z + \frac{8}{\pi} B_{101020} \cos 4\pi z \right) \\
\widehat{V}_z &= A_{101020} \sin 2\pi z + B_{101020} \sin 4\pi z \\
\widehat{\theta} &= C_{101020} \sin 2\pi z + D_{101020} \sin 4\pi z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{101020} &= -\frac{1}{39\pi^2} \left( \frac{2\beta'_2}{\mathcal{P}} + \frac{2\pi\delta'_2}{\mathcal{P}} + \frac{2(2\gamma'_2 + \gamma''_2)}{9\pi^2} \right), \\
C_{101020} &= -\frac{1}{13} \left( \frac{\beta'_2}{\mathcal{P}} + \frac{\pi\delta'_2}{\mathcal{P}} + \frac{3(2\gamma'_2 + \gamma''_2)}{\pi^2} \right).
\end{aligned}$$

### A.3.8 Calcul de $\Phi_{102010}$

On a

$$\begin{aligned}
\Phi_{102010} &= e^{ik_2 \cdot X} \widehat{\Phi}_{102010}(z), \\
-2\mathbf{R}(\Phi_{101000}, \Phi_{001010}) &= \left( \begin{array}{c} \Pi_0 e^{ik_2 \cdot X} \left( \begin{array}{c} 2ik_2 v_{1010}^2 (-1 + 3 \cos 4\pi z) \\ 3\pi v_{1010}^2 \sin 4\pi z \end{array} \right) \\ 3\pi v_{1010} \vartheta_{1010} e^{ik_2 \cdot X} \sin 4\pi z \end{array} \right), \\
-2\mathbf{R}(\zeta_1, \Phi_{002010}) &= \left( \begin{array}{c} \Pi_0 e^{ik_2 \cdot X} \left( \begin{array}{c} i(\alpha_{0201} + \alpha_{2201} \cos 2\pi z + \alpha_{4201} \cos 4\pi z) \\ \beta'_2 \sin 2\pi z + \beta'_4 \sin 4\pi z \end{array} \right) \\ e^{ik_2 \cdot X} (\gamma'_2 \sin 2\pi z + \gamma'_4 \sin 4\pi z) \end{array} \right),
\end{aligned}$$

où on note que

$$\begin{aligned}
k_1 \cdot G_{002010} &= k_1 \cdot G_{001020} \\
k_1 \cdot H_{002010} &= k_1 \cdot H_{001020},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\alpha_{0201} &= \frac{\pi}{4} G_{002010} - k_1 [A_{1020} + \frac{1}{\pi} (k_1 \cdot G_{001020})], \\
\alpha_{2201} &= \frac{5\pi}{4} G_{002010} - \frac{3\pi}{4} H_{002010} \\
&\quad + k_1 [A_{1020} - B_{1020} - \frac{1}{\pi} (k_1 \cdot G_{001020} + k_1 \cdot H_{001020})], \\
\alpha_{4201} &= \frac{9\pi}{4} H_{002010} + k_1 [B_{1020} - \frac{1}{\pi} (k_1 \cdot H_{001020})], \\
-2\mathbf{R}(\zeta_3, \Phi_{102000}) &= \left( \begin{array}{c} \Pi_0 e^{ik_2 \cdot X} \left( \begin{array}{c} i(\alpha_{0000} + \alpha_{2000} \cos 2\pi z + \alpha_{4000} \cos 4\pi z) \\ \beta'_2 \sin 2\pi z + \beta'_4 \sin 4\pi z \end{array} \right) \\ e^{ik_2 \cdot X} (\gamma'_2 \sin 2\pi z + \gamma'_4 \sin 4\pi z) \end{array} \right),
\end{aligned}$$

où on note que

$$\begin{aligned}
k_3 \cdot G_{102000} &= k_1 \cdot G_{001020} = k_2 \cdot G_{100020}, \\
k_3 \cdot H_{102000} &= k_1 \cdot H_{001020} = k_2 \cdot H_{100020},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{0000} &= \frac{\pi}{4} G_{102000} - k_3 [A_{1020} + \frac{1}{\pi} (k_1 \cdot G_{001020})], \\
\alpha_{2000} &= \frac{5\pi}{4} G_{102000} - \frac{3\pi}{4} H_{102000} \\
&\quad + k_3 [A_{1020} - B_{1020} - \frac{1}{\pi} (k_1 \cdot G_{001020} + k_1 \cdot H_{001020})], \\
\alpha_{4000} &= \frac{9\pi}{4} H_{102000} + k_3 [B_{1020} - \frac{1}{\pi} (k_1 \cdot H_{001020})], \\
-2\mathbf{R}(\zeta_2, \Phi_{101010}) &= \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ e^{ik_2 \cdot X} (\gamma''_2 \sin 2\pi z + \gamma''_4 \sin 4\pi z) \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Il en résulte que le système pour  $\widehat{\Phi}_{102010}(z) = (\widehat{V}_\perp, \widehat{V}_z, \widehat{\theta})$  s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(D^2 - k_c^2)\widehat{V}_\perp + ik_2\phi &= ik_2(\delta'_0 + \delta'_2 \cos 2\pi z + \delta'_4 \cos 4\pi z), \\ \mathcal{P}[(D^2 - k_c^2)\widehat{V}_z + \widehat{\theta}] + D\phi &= 2\beta'_2 \sin 2\pi z + (3\pi v_{1010}^2 + 2\beta'_4) \sin 4\pi z, \\ (D^2 - k_c^2)\widehat{\theta} + \frac{27\pi^4}{4}\widehat{V}_z &= (2\gamma'_2 + \gamma''_2) \sin 2\pi z + (3\pi v_{1010}\vartheta_{1010} + (2\gamma'_4 + \gamma''_4) \sin 4\pi z, \\ ik_2 \cdot \widehat{V}_\perp + D\widehat{V}_z &= 0, \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites usuelles, et où on note que

$$\begin{aligned} k_1\delta_2 &= \alpha_{2102} + \alpha_{2020} \\ k_2\delta'_2 &= \alpha_{2201} + \alpha_{2000}. \end{aligned}$$

Ainsi on trouve

$$\begin{aligned} \widehat{V}_\perp &= ik_2\left(\frac{4}{\pi}A_{101020} \cos 2\pi z + \frac{8}{\pi}B_{101020} \cos 4\pi z\right) \\ \widehat{V}_z &= A_{101020} \sin 2\pi z + B_{101020} \sin 4\pi z \\ \widehat{\theta} &= C_{101020} \sin 2\pi z + D_{101020} \sin 4\pi z. \end{aligned}$$

### A.3.9 Calcul de $c$

Pour le calcul (30) du coefficient  $c$ , on considère d'une part les termes

$$2\mathbf{R}(\overline{\zeta_1}, \overline{\Phi_{002020}}), 2\mathbf{R}(\overline{\zeta_2}, \overline{\Phi_{101020}}), 2\mathbf{R}(\overline{\zeta_3}, \overline{\Phi_{102010}})$$

puis

$$2\mathbf{R}(\overline{\Phi_{101000}}, \overline{\Phi_{001020}}), 2\mathbf{R}(\overline{\Phi_{100010}}, \overline{\Phi_{002010}})$$

et enfin

$$2\mathbf{R}(\overline{\Phi_{001010}}, \overline{\Phi_{101010}}),$$

en ne gardant que les termes pouvant contribuer au produit scalaire avec  $\zeta_1$ . On indique par le signe  $\sim$  des identités qui suppriment les termes inutiles pour le calcul de  $c$  :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{R}(\overline{\zeta_1}, \overline{\Phi_{002020}}) &\sim \left( \Pi_0 e^{ik_1 \cdot X} \begin{pmatrix} 3ik_1 A_{002020} \cos \pi z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \\ 2\mathbf{R}(\overline{\zeta_2}, \overline{\Phi_{101020}}) &\sim \left( \Pi_0 e^{ik_1 \cdot X} \begin{pmatrix} -i(2k_1 + 3k_3)A_{101020} \cos \pi z \\ \frac{3\pi}{4}A_{101020} \sin \pi z \\ e^{ik_1 \cdot X} \frac{3\pi}{4}C_{101020} \sin \pi z \end{pmatrix} \right), \\ 2\mathbf{R}(\overline{\zeta_3}, \overline{\Phi_{102010}}) &\sim \left( \Pi_0 e^{ik_1 \cdot X} \begin{pmatrix} -i(2k_1 + 3k_2)A_{101020} \cos \pi z \\ \frac{3\pi}{4}A_{101020} \sin \pi z \\ e^{ik_1 \cdot X} \frac{3\pi}{4}C_{101020} \sin \pi z \end{pmatrix} \right), \\ 2\mathbf{R}(\overline{\Phi_{101000}}, \overline{\Phi_{001020}}) &\sim \left( \Pi_0 e^{ik_1 \cdot X} \begin{pmatrix} iv_{1010}\phi_1 \cos \pi z \\ \pi v_{1010}\phi_2 \sin \pi z \\ e^{ik_1 \cdot X} \pi \phi_3 \sin \pi z \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= -\frac{2k_3}{\pi}(k_3 \cdot G_{001020} + k_3 \cdot H_{001020}) + \pi G_{001020} \\
&\quad + 4k_3(A_{1020} + B_{1020}), \\
\phi_2 &= 2A_{1020} - B_{1020} + \frac{1}{2\pi}(H_{001020} \cdot k_3 - G_{001020} \cdot k_3), \\
\phi_3 &= C_{1020}v_{1010} + (A_{1020} - B_{1020})\vartheta_{1010} + \frac{\vartheta_{1010}}{2\pi}(H_{001020} \cdot k_3 - G_{001020} \cdot k_3), \\
2\mathbf{R}(\overline{\Phi_{100010}}, \overline{\Phi_{002010}}) &\sim \begin{pmatrix} \Pi_0 e^{ik_1 \cdot X} \begin{pmatrix} iv_{1010}\phi'_1 \cos \pi z \\ \pi v_{1010}\phi_2 \sin \pi z \end{pmatrix} \\ e^{ik_1 \cdot X} \pi \phi_3 \sin \pi z \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi'_1 &= -\frac{2k_2}{\pi}(k_3 \cdot G_{001020} + k_3 \cdot H_{001020}) + \pi G_{002010} \\
&\quad + 4k_2(A_{1020} + B_{1020}),
\end{aligned}$$

où on note que

$$\begin{aligned}
k_3 \cdot G_{001020} &= k_2 \cdot G_{002010} \\
k_3 \cdot H_{001020} &= k_2 \cdot H_{002010}, \\
2\mathbf{R}(\overline{\Phi_{001010}}, \overline{\Phi_{101010}}) &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{ik_1 \cdot X} \pi \phi'_3 v_{1010} \sin \pi z \end{pmatrix}, \\
\phi'_3 &= -\frac{1}{2}(C_{101010} - 3D_{101010}) = -\frac{3}{2\pi} \left( \frac{9\pi^2}{2} v_{1010} + \vartheta_{1010} \right).
\end{aligned}$$

La première composante qui intervient dans le produit scalaire donnant  $c\langle \zeta_1, \zeta_1 \rangle$  est alors

$$[3k_1 A_{002020} - k_1 A_{101020} + v_{1010}(\phi_1 + \phi'_1)]i \cos \pi z$$

dont on doit faire le produit scalaire avec

$$\frac{2i}{\pi} k_1 \cos \pi z.$$

La deuxième composante est

$$\left( \frac{3\pi}{2} A_{101020} + 2\pi v_{1010} \phi_2 \right) \sin \pi z$$

dont on doit faire le produit scalaire avec  $\sin \pi z$ . La troisième composante est

$$\left( \frac{3\pi}{2} C_{101020} + 2\pi \phi_3 + \pi \phi'_3 v_{1010} \right) \sin \pi z$$

dont on doit faire le produit scalaire avec  $\frac{2\mathcal{P}}{3\pi^2} \sin \pi z$  (on tient compte du coefficient  $\mathcal{P}/\mathcal{R}_c$  dans le produit scalaire). Après intégration on a ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}(1 + \mathcal{P})c &= \frac{\pi}{2} [3A_{002020} - A_{101020} + \frac{v_{1010}}{k_c^2} (\phi_1 + \phi'_1) \cdot k_1] \\
&\quad + \left( \frac{3\pi}{4} A_{101020} + \pi v_{1010} \phi_2 \right) + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \left( \frac{1}{2} C_{101020} + \frac{2}{3} \phi_3 + \frac{1}{3} \phi'_3 v_{1010} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left( 3A_{002020} + \frac{1}{2} A_{101020} + \frac{\mathcal{P}}{\pi^2} C_{101020} \right) + \pi v_{1010} \left( \phi_2 + \frac{\mathcal{P}}{3\pi^2} \phi'_3 \right) + \frac{2\mathcal{P}}{3\pi} \phi_3 \\
&\quad + \frac{v_{1010}}{\pi} (\phi_1 + \phi'_1) \cdot k_1.
\end{aligned} \tag{31}$$

On montre ci-dessous que  $c$  est une fonction, fraction rationnelle, de  $\mathcal{P}$ , de la forme

$$\frac{2(A_0\mathcal{P}^4 + A_1\mathcal{P}^3 + A_2\mathcal{P}^2 + A_3\mathcal{P} + A_4)}{3\pi^2\mathcal{P}^3(1 + \mathcal{P})} \quad (32)$$

qu'il faut étudier pour connaître son signe. On remarque que le second membre de (31) est la somme d'une part d'un terme linéaire en  $(v_{1010}, \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2})$ , d'autre part d'un terme quadratique en  $(v_{1010}, \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2})$ . Le terme linéaire est donné par

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2}(3A_{002020} + \frac{1}{2}A_{101020} + \frac{\mathcal{P}}{\pi^2}C_{101020}) \\ = & \frac{1}{90\pi}\left(\frac{8\pi\delta_2}{\mathcal{P}} - \frac{8}{3\pi^2}\gamma_2 - \frac{16}{\mathcal{P}}\beta_2\right) \\ & - \frac{1}{156\pi}\left(3\left(2 + \frac{1}{\mathcal{P}}\right)(\beta'_2 + \pi\delta'_2) + (9\mathcal{P} + \frac{1}{9})\left(4\frac{\gamma'_2}{\pi^2} + 2\frac{\gamma''_2}{\pi^2}\right)\right), \\ & \frac{8\pi\delta_2}{\mathcal{P}} - \frac{8}{3\pi^2}\gamma_2 - \frac{16}{\mathcal{P}}\beta_2 \\ = & \frac{v_{1010}}{\mathcal{P}}\left(\frac{4638}{385} - \frac{163344}{6545\mathcal{P}}\right) - \frac{2618}{935\mathcal{P}}\frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2} \\ & - 6\pi A_{1020}\left(1 + \frac{4}{\mathcal{P}}\right) + 6\pi B_{1020}\left(\frac{4}{\mathcal{P}} - 1\right) \\ & + \frac{1}{2\pi}(C_{1020} - 3D_{1020}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3\left(2 + \frac{1}{\mathcal{P}}\right)(\beta'_2 + \pi\delta'_2) + (9\mathcal{P} + \frac{1}{9})\left(4\frac{\gamma'_2}{\pi^2} + 2\frac{\gamma''_2}{\pi^2}\right) \\ = & \frac{9\pi}{2}(A_{1020} + B_{1020})\left(\frac{1}{2\mathcal{P}} + \frac{11}{9} + 18\mathcal{P}\right) \\ & + (9\mathcal{P} + \frac{1}{9})\left(\frac{5}{\pi}C_{1020} - \frac{3}{\pi}D_{1020}\right) \\ & + \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2}\left(\frac{153063}{3740}\mathcal{P} + \frac{14339}{2805} + \frac{17229}{7480\mathcal{P}}\right) \\ & + v_{1010}\left(\frac{3159}{44}\mathcal{P} + \frac{3422001}{13090} + \frac{32663438}{52360\mathcal{P}} + \frac{32612679}{104720\mathcal{P}^2}\right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi le terme linéaire en  $(v_{1010}, \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2})$  sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2}(3A_{002020} + \frac{1}{2}A_{101020} + \frac{\mathcal{P}}{\pi^2}C_{101020}) \\ = & \frac{v_{1010}}{\pi}(a_{-1}\mathcal{P} + a_0 + \frac{a_1}{\mathcal{P}} + \frac{a_2}{\mathcal{P}^2}) + \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^3}(b_{-1}\mathcal{P} + b_0 + \frac{b_1}{\mathcal{P}}), \end{aligned} \quad (33)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{5661}{3422} \simeq 1.654, \\ a_0 &= \frac{323}{7920} - \frac{1337}{12 \times 88} - \frac{405667}{52 \times 4760} \simeq -2.944, \\ a_1 &= \frac{9691}{520 \times 88} + \frac{773}{75 \times 77} - \frac{162984781}{780 \times 52360} \simeq -3.645, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{90} \left[ -\frac{163344}{6545} - \frac{15 \times 45}{11} - \frac{12 \times 147}{1020} \right] \\
&\quad - \frac{1}{156} \left[ \frac{45 \times 45}{352} - \frac{3 \times 147}{2720} + \frac{32612679}{104720} \right] \\
&\simeq -2.032
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{-1} &= -\frac{1}{156} \left[ \frac{81 \times 15}{44} + \frac{45 \times 125}{88} + \frac{27 \times 147}{2040} - \frac{81}{1020} + \frac{153063}{3740} \right] \\
&\simeq -0.8611
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{1}{90} \left[ -\frac{45}{22} + \frac{1}{170} + \frac{125}{176} + \frac{3 \times 147}{4080} \right] \\
&\quad - \frac{1}{156} \left[ \frac{11 \times 15}{88} - \frac{11}{2040} + \frac{5 \times 125}{9 \times 88} + \frac{147}{6120} + \frac{14339}{2805} \right] \\
&\simeq -0.0635
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{90} \left[ -\frac{2618}{935} - \frac{12 \times 15}{22} - \frac{2}{85} \right] \\
&\quad - \frac{1}{156} \left[ \frac{135}{176} - \frac{3}{1360} + \frac{17229}{7480} \right] \\
&\simeq -0.1420.
\end{aligned}$$

Le terme quadratique en  $(v_{1010}, \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2})$  dans (31) est de la forme

$$v_{1010}^2 (c_{-1} \mathcal{P} + c_0 + \frac{c_1}{\mathcal{P}}) + v_{1010} \frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2} (d_{-1} \mathcal{P} + d_0 + \frac{d_1}{\mathcal{P}}) + (\frac{\vartheta_{1010}}{\pi^2})^2 e_{-1} \mathcal{P}$$

avec

$$c_{-1} = -\frac{9}{4} - \frac{75}{22} = -\frac{249}{44} \simeq -5.659$$

$$c_0 = \frac{135}{22} \simeq 6.163$$

$$c_1 = -\frac{7543}{20944} + \frac{147}{680} \simeq -0.1439$$

$$d_{-1} = -\frac{1}{6} \simeq -0.1667$$

$$d_0 = \frac{1}{340} - \frac{62873}{3 \times 52360} + \frac{735}{88} \simeq 7.955$$

$$d_1 = \frac{49}{680} \simeq 0.0721$$

$$e_{-1} = \frac{5}{22} + \frac{1}{1530} \simeq 0.2280.$$

Finalement, en utilisant (22) on trouve le polynôme numérateur de (32) sous la forme

$$A_0 \mathcal{P}^4 + A_1 \mathcal{P}^3 + A_2 \mathcal{P}^2 + A_3 \mathcal{P} + A_4$$

avec

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{26}[-a_{-1} - \frac{81}{2}b_{-1} + \frac{c_{-1}}{26} + \frac{81d_{-1}}{52} + \frac{(81)^2}{104}e_{-1}], \\
A_1 &= \frac{1}{26}[-a_0 + 3a_{-1} - \frac{81}{2}b_0 + \frac{9b_{-1}}{2} + \frac{c_0}{26} - \frac{6c_{-1}}{26} \\
&\quad + \frac{81d_0}{52} - \frac{63d_{-1}}{13} - \frac{729}{52}e_{-1}], \\
A_2 &= \frac{1}{26}[-a_1 + 3a_0 - \frac{81}{2}b_1 + \frac{9b_0}{2} + \frac{c_1}{26} - \frac{6c_0}{26} + \frac{9c_{-1}}{26} \\
&\quad + \frac{81d_1}{52} - \frac{63d_0}{13} + \frac{27d_{-1}}{52} + \frac{81}{104}e_{-1}], \\
A_3 &= \frac{1}{26}[-a_2 + 3a_1 + \frac{9b_1}{2} - \frac{6c_1}{26} + \frac{9c_0}{26} - \frac{63d_1}{13} + \frac{27d_0}{52}], \\
A_4 &= \frac{1}{26}[3a_2 + \frac{9c_1}{26} + \frac{27d_1}{52}].
\end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
26A_0 &\simeq 47.127, \quad 26A_1 \simeq 18.149, \quad 26A_2 \simeq -41.457, \\
26A_3 &\simeq -3.595, \quad 26A_4 \simeq -6.109.
\end{aligned}$$

et on note (voir (32)) que  $c < 0$  pour  $\mathcal{P} \in (0.3795, 0.6956)$  ce qui implique

$$c(-1)^{k+1} > 0 \text{ pour } k = 0 \text{ et } < 0 \text{ pour } k = 1.$$

On en déduit que la structure convective en hexagones est instable (faiblement) alors que la structure en triangles équilatéraux est stable.

## Références

- [1] M. Golubitsky, I. Stewart, D.G. Schaeffer. *Singularities and groups in bifurcation theory*. Vol. II. Applied Mathematical Sciences, 69. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [2] M.Haragus, G.Iooss. *Local Bifurcations, center manifolds, and Normal Forms in Infinite-dimensional dynamical Systems*. Springer Universitext , London Dordrecht Heidelberg New York, 2011.
- [3] H. Kielhöfer, K. Kirchgässner. Stability and bifurcation in fluid dynamics. Rocky Mountain Consortium Symposium on Nonlinear Eigenvalue Problems (Santa Fe, N.M., 1971). *Rocky Mountain J. Math.* 3 (1973), 275–318.
- [4] E.L. Koschmieder. *Bénard cells and Taylor vortices*. Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics. Cambridge University Press, New York, 1993.
- [5] E.Palm. Nonlinear thermal convection. *Annual Rev. Fluid Mech.* 7 (1975), 39-61.
- [6] A. Pellew, R.V. Southwell. On maintained convection motion in a fluid heated from below. *Proc. Roy. Soc. A*, 176 (1940), 312-343.
- [7] D.H. Sattinger. Group Representation Theory, Bifurcation Pattern Formation. *J. Funct. Anal.* 28 (1978), 58-101.
- [8] A.Schlüter, D.Lortz, F.Busse. On the stability of steady finite amplitude convection. *J.Fluid Mech.* 23,1 (1965), 129-144.
- [9] M.R. Ukhovskii, V.I. Yudovich. On the equations of steady state convection. *J. Appl. Math. and Mech.* 27 (1963), 432-440.

- [10] V.I. Yudovich. On the origin of convection. *J. Appl. Math. Mech.* 30 (1966), 1193-1199.
- [11] V.I. Yudovich. Free convection and bifurcation. *Prikl. Mat. Meh.* 31, 101–111 (Russian); translated as *J. Appl. Math. Mech.* 31 (1967), 103–114.
- [12] V.I. Yudovich. Stability of convection flows. *J. Appl. Math. Mech.* 31 (1967), 294-303.