# Corrigé Partiel.

## Ex. 1.

1. Cf cours.

2. $$\left|\sqrt{ab}-c\right| = \frac{\left|\left(\sqrt{ab}-c\right)\left(\sqrt{ab}+c\right)\right|}{\sqrt{ab}+c}$$

$$\leq |ab-c^2| \qquad \text{car } a,b,c \geq 1 \text{ donc } \sqrt{ab}+c \geq 2$$

$$= |ab-ac+ac-c^2| \leq |ab-ac| + |ac-c^2|$$

$$= a|b-c| + c|a-c|$$

3. On écrit : $\displaystyle\left|I_n - \int_0^1 f(x)\,dx\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}\left[\sqrt{f\left(\tfrac{i}{n}\right)f\left(\tfrac{i+1}{n}\right)} - f(x)\right]\right|$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{i/n}^{i+1/n}\left|\sqrt{f\left(\tfrac{i}{n}\right)f\left(\tfrac{i+1}{n}\right)} - f(x)\right|dx$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{i/n}^{i+1/n}\left(f\left(\tfrac{i}{n}\right)\left|f\left(\tfrac{i+1}{n}\right)-f(x)\right| + f(x)\left|f\left(\tfrac{i}{n}\right)-f(x)\right|\right)dx$$

d'après 2. car $f \geq 1$

$$\leq \|f\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}}\left(\left|f\left(\tfrac{i+1}{n}\right)-f(x)\right| + \left|f\left(\tfrac{i}{n}\right)-f(x)\right|\right)dx$$

$$\leq \|f\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1}\int_{i/n}^{\frac{i+1}{n}} 2\,\omega_f\left(\tfrac{1}{n}\right)dx \qquad \text{avec } \omega_f(\eta) = \sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\ |x-y|<\eta}} |f(x)-f(y)|$$

$$= 2\|f\|_\infty\,\omega_f\left(\tfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $f$ est continue sur $[0,1]$ donc uniformément continue.

4. • $f_n(x) = \frac{1}{n\pi} \sin^2(\pi n x)$

$f_n'(x) = 2 \sin(\pi n x) \cos(\pi n x) = \sin(2\pi n x) \in [-1,1]$

• $I_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{f_n\left(\frac{i}{n}\right) f_n\left(\frac{i+1}{n}\right)} = 0$

car $f_n\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n\pi} \sin^2\left(\pi \cancel{n} \frac{i}{\cancel{n}}\right) = 0. \quad \forall i$

• $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin^2(\pi n x)\, dx = \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi n x)}{2}$

$= \frac{1}{2n\pi} - \left[ \frac{\sin(2\pi n x)}{(2\pi n)^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\pi n}.$

5. Remarquons que la fonction du 4. <u>n'est pas</u> un contre-exemp

$\forall x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, . si $f\left(\frac{i}{n}\right) \leq \frac{2}{n}$ alors comme $\|f'\|_\infty \leq$

par inégalité des accroissements finis : $f(x) \leq \frac{3}{n}$ et $f\left(\frac{i+1}{n}\right) \leq \frac{3}{n}$

donc $\left| \sqrt{f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{i+1}{n}\right)} - f(x) \right| \leq \frac{\sqrt{6}}{n} + \frac{3}{n}$

. si $f\left(\frac{i}{n}\right) > \frac{2}{n}$ comme on a encore $\|f'\|_\infty \leq 1$ :

$\frac{1}{2} f\left(\frac{i}{n}\right) \leq f(x) \leq 2 f\left(\frac{i}{n}\right)$ et $\frac{1}{2} f\left(\frac{i}{n}\right) \leq f\left(\frac{i+1}{n}\right) \leq 2 f\left(\frac{i}{n}\right)$

Reprenons le 2. : $\left| \sqrt{f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{i+1}{n}\right)} - f(x) \right| \leq \frac{f\left(\frac{i}{n}\right) \left| f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f(x)\right| + f(x) \left| f\left(\frac{i}{n}\right) - f\right.}{\sqrt{f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{i+1}{n}\right)} + f(x)}$

$\leq 2 \left| f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f(x) \right| + \left| f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x) \right|$

$\leq 2 \|f'\|_\infty \left(\frac{i+1}{n} - x\right) + \|f'\|_\infty \left(x - \frac{i}{n}\right)$ par inég. accroissemen finis

$\leq 3 \|f'\|_\infty \frac{1}{n}.$

Conclusion : dans les 2 cas :

$$\left| \sqrt{f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{i+1}{n}\right)} - f(x) \right| \leq \frac{C}{n} \qquad (\text{avec } C = 3 + \sqrt{6}).$$

Donc : $\left| I_n - \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} \left| \sqrt{f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{i+1}{n}\right)} - f(x) \right| dx$

$$\leq \frac{C}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} dx = \frac{C}{n} \qquad \text{cqfd.}$$

## Ex. 2 :

1. $\forall u \in C^\infty$. Par Taylor-Lagrange $\forall n$, $\exists s_n$ tq :

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + u'(t_n)\,\delta + u''(t_n)\frac{\delta^2}{2} + u^{(3)}(s_n)\frac{\delta^3}{6}$$

et $\exists r_n$ tq :

$$u(t_{n-1}) = u(t_n) - u'(t_n)\,\delta + u''(t_n)\frac{\delta^2}{2} - u^{(3)}(r_n)\frac{\delta^3}{6}$$

Donc : $\left| \frac{u(t_{n+1}) - u(t_{n-1})}{2\delta} - u'(t_n) \right| = \left| \left(u^{(3)}(s_n) + u^{(3)}(r_n)\right)\frac{\delta^2}{3} \right|$

$$\leq \| u^{(3)} \|_\infty \frac{\delta^2}{3}$$

Ainsi la méthode est consistante à l'ordre 2.

2. Soit $u$ une solution de $x' = f(t, x)$.

$$x(t_{n+1}) = x(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} x'(t)\,dt = x(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} f(t, x(t))\,dt$$

En soustrayant la relation $x_{n+1} = x_{n-1} + 2\delta f(t_n, x_n)$ on a :

$$e_{n+1} = e_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \left( f(t, x(t)) - f(t_n, x_n) \right) dt$$

$$= e_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \left( f(t_n, x(t_n)) - f(t_n, x_n) \right) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \left( f(t, x(t_n)) - f(t_n, x(t_n)) \right) dt$$

$$+ \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \left( f(t, x(t)) - f(t, x(t_n)) \right) dt$$

- $$\left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \Big(f\big(t_n, x(t_n)\big) - f\big(t_n, x_n\big)\Big)\,dt\right| = 2\delta\,\Big|f\big(t_n, x(t_n)\big) - f\big(t_n, x_n\big)\Big|$$

$$\leq 2\delta\,\|\partial_x f\|_\infty\,|x_n - x(t_n)| \leq 2\delta\,|e_n|.$$

- $$\left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \Big(f\big(t, x(t_n)\big) - f\big(t_n, x(t_n)\big)\Big)\,dt\right| = \left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \Big[(t-t_n)\,\partial_t f\big(t_n, x(t_n)\big) + \frac{(t-t_n)^2}{2}\,\partial_t f\big(s_n, x(t_n)\big)\Big]\,dt\right|$$

per Taylor-Lagrange

$$= \left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \frac{(t-t_n)^2}{2}\,\partial_t f\big(s_n, x(t_n)\big)\,dt\right| \leq \|\partial_t f\|_\infty\,\frac{\delta^3}{3} \leq C\,\delta^3.$$

- $$\left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \Big[f\big(t, x(t)\big) - f\big(t, x(t_n)\big)\Big]\,dt\right| = \left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \Big[\partial_x f\big(t, x(t_n)\big)\,\big(x(t) - x(t_n)\big) + \partial_x^2 f\big(t, v_n(t)\big)\,\frac{\big(x(t)-x(t_n)\big)^2}{2}\Big]\,dt\right|$$

encore per Taylor-Lagrange.

$$\leq \left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \Big[\partial_x f\big(t, x(t_n)\big)\,\big(x(t) - x(t_n)\big)\Big]\,dt\right| + \underbrace{\|\partial_x^2 f\|_\infty\,\|x'\|_\infty \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \frac{(t-t_n)^2}{2}}$$

$$\leq C_1\delta^3 + \left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \partial_x f\big(t, x(t_n)\big)\,\big(x(t) - x(t_n)\big)\,dt\right|$$

inég. accr. finis

$$= C_1\delta^3 + \left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \partial_x f\big(t_n, x(t_n)\big)\,\big(x(t) - x(t_n)\big)\,dt\right| + \left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \overbrace{\Big(\partial_x f\big(t, x(t_n)\big) - \partial_x f\big(t_n, x(t_n)\big)\Big)}^{\leq \|\partial_{tx} f\|_\infty (t-t_n)} \times \underbrace{\big(x(t) - x(t_n)\big)}_{\leq \|x'\|_\infty (t-t_n)}\,dt\right|$$

$$\leq (C_1 + C_2)\,\delta^3 + \left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \partial_x f\big(t_n, x(t_n)\big)\,\big(x(t) - x(t_n)\big)\,dt\right|$$

$$= (C_1 + C_2)\,\delta^3 + \left|\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} \partial_x f\big(t_n, x(t_n)\big)\,\Big((t-t_n)\,x'(t_n) + \frac{1}{2}(t-t_n)^2\,x''(s_n)\Big)\,dt\right|$$

$$\leq (C_1 + C_2 + C_3)\,\delta^3 \quad \text{car} \quad \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} (t - t_n)\,dt = 0.$$

Conclusion :

$$|e_{n+1}| \leq |e_{n-1}| + 2\delta|e_n| + C\delta^3.$$

3. Par récurrence montrons que $|e_n| + C'\delta^2 \leq u_n$. $H(n)$.

$H(0)$ est vraie car $e_0 = 0$. $H(1)$ est vraie aussi

$H(n)$ et $H(n-1) \Rightarrow H(n+1)$ :

$$|e_{n+1}| + C'\delta^2 \leq |e_{n-1}| + 2\delta|e_n| + C\delta^3 + C'\delta^2$$

$$\leq \left(|e_{n-1}| + C'\delta^2\right) + 2\delta\left(|e_n| + C'\delta^2\right) \quad \text{si } 2C' \geq$$

$$\leq u_{n-1} + 2\delta u_n \quad \text{par } H(n) \text{ et } H(n-1).$$

$$= u_{n+1}$$

cqfd.

4- $\lambda^n$ est solution de $u_{n+1} = u_{n-1} + 2\delta u_n$ avec $\lambda \neq 0$

ssi $\lambda^2 = 1 + 2\delta\lambda$ $\quad \Delta' = \delta^2 + 1$.

ssi $\lambda = \delta \pm \sqrt{1+\delta^2}$ $\quad$ soit $\lambda_1 = \delta + \sqrt{1+\delta^2}$ $\quad \lambda_2 = \delta - \sqrt{1+\delta^2}$

$C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ est solution générale.

On a $u_0 = C'\delta^2$ et $u_1 = |e_1| + C'\delta^2 = \overbrace{\left|\delta f(0,u_0) - \int_0^\delta f(t,u(t))\right|}^{\leq \|\nabla f\|_\infty \delta^2.} + C'\delta^2.$

Donc on doit prendre $C_1, C_2$ tq $C_1 + C_2 = C'\delta^2$

et $C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = u_1$ $\quad$ soit $(C_1 + C_2)\delta + \sqrt{1+\delta^2}\,(C_1 - C_2) = u_1.$

d'où $C_1 - C_2 = \dfrac{u_1 - C'\delta^3}{\sqrt{1+\delta^2}} > 0$ et donc $C_1 = \dfrac{C'\delta^2}{2} + \dfrac{u_1 - C'\delta^3}{2\sqrt{1+\delta^2}}$

$C_2 = \dfrac{C'\delta^2}{2} - \dfrac{u_1 - C'\delta^3}{2\sqrt{1+\delta^2}}$.

Enfin : $u_n = C_1 \left( \delta + \sqrt{1+\delta^2} \right)^n + C_2 (-1)^n \left( \sqrt{1+\delta^2} - \delta \right)^n$

$\leq (C_1 + C_2) \left( \delta + \sqrt{1+\delta^2} \right)^n = C' \delta^2 \left( \delta + \sqrt{1+\delta^2} \right)^n$

$\leq C' \delta^2 \left( \delta + 1 + \frac{\delta^2}{2} \right)^n$ cqfd.