Ex. 1 : L3 MATH - Analyse Numérique - TD2 - Corrigé

1

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+x_k}\longrightarrow\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\ln(1+x)\Big]_0^1=\ln 2-0$$

$$\forall n,\ \sum_{1}^{n}\left(\sqrt{n^2-k^2}\right)^{-1}=\sum_{1}^{n}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)^{-1}\longrightarrow\int_0^1 1/\sqrt{1-x^2}\,dx=\Big[\operatorname{Arc\,sin} x\Big]_0^1=\frac{\pi}{2}\quad(n\to+\infty)$$

$$I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\cos\theta\cdot\cos\theta\, d\theta$$

$\theta=\operatorname{Arc\,cos} x$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x=\sin\theta \text{ et}\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow dx=\cos\theta\, d\theta \text{ et } \sqrt{1-x^2}=\cos\theta$$

(ici, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, car $0\le x\le 1$)

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\, d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\Big[\theta+\cancel{\tfrac{1}{2}\sin 2\theta}\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

$$\sqrt[n]{\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\cdot\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)}$$

$$=\exp\left[\ln\left(\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right)\right]$$

$$=\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right]\longrightarrow\exp\Big(\underbrace{\int_0^1\ln(1+x^2)\,dx}_{J}\Big)$$

continuité de exp + sommes de Riemann

$$\text{Or}\quad J=\int_0^1 1.\ln(1+x^2)\,dx\underset{\text{par parties}}{=}\Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$=\ln 2-0-2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\ln 2-2K.$$

$$K=\int_0^1\left(\frac{1+x^2}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=1-\Big[\operatorname{Arctg} x\Big]_{x=0}^{1}=1-\frac{\pi}{4}.$$

Ex. 2 :

2.1_ méthode des rectangles.

$f \in C^0([0,1])$; $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

a) f est uniformément continue sur $[0,1]$, car elle est continue sur le compact $K=[0,1]$ i.e. [= c'est-à-dire] le fermé borné $K=[0,1]$.

Donc f est uniformément continue sur K :
$\forall \varepsilon>0, \exists \alpha=\alpha(\varepsilon)$ tq $\forall x \in K, \forall x' \in K, \{|x-x'|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon$

[α ne dépend pas du point x, ni de x', il ne dépend que de la différence $|x-x'|$.]

b) mq la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ cv vers $\int_0^1 f(x)\,dx$:
cf cours ; la démonstration utilise de manière essentielle la continuité uniforme de f sur K.
Par exemple, soit $m_k = \inf_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x)$ et $M_k = \sup_{x_k\leq x\leq x_{k+1}} f(x)$.

Alors, on a, pour $x_k = \frac{k}{n}$:
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k, \text{ et}$$
f étant Riemann-intégrable, car continue, on a aussi
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} m_k \leq \underline{I := \int_0^1 f(x)\,dx} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M_k.$$

Donc mq
$$\left|I - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k) \xrightarrow[(n\to+\infty)]{} 0.$$
Comme f est unif^t continue,
$\forall \varepsilon_1>0, \exists \alpha(\varepsilon_1)>0$ tq $\forall x, x' \in [0,1], \{|x-x'|<\alpha(\varepsilon_1) \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon_1\}$.

On en déduit que
$\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N(\varepsilon), |I-S_n|<\varepsilon$. En effet, choisissons $\varepsilon_1 = (1-0).\varepsilon = \varepsilon$ (on intègre sur $[0,1]$). Alors
$\forall n \geq N \geq \frac{1}{\alpha(\varepsilon_1)}$, $\quad |I-S_n| \leq \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)} \leq \frac{1}{n}\cdot(n\varepsilon_1) = \varepsilon_1 = \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon>0$, $\exists\, \underbrace{N(\varepsilon)=\frac{1}{\alpha(\varepsilon_1)}; \forall n \geq N(\varepsilon)}$, $|I-S_n|<\varepsilon$: 3

la suite (S_n) CV vers $I=\int_0^1 f(x)\,dx$ quand $n \to +\infty$.

c) Si f est C^2 sur $[0,1]$, on a e.g. [par exemple] :

$$\Big|\underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{I} - S_n\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{1}{n} f(x_k)\Big|$$

$$= \Big|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x)-f(x_k))\,dx\Big|$$

$$= \Big|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Big[\cancel{f(x_k)} + (x-x_k)f'(x_k) + \frac{(x-x_k)^2}{2!} f''(\xi_k(x)) - \cancel{f(x_k)}\Big] dx$$

où $\xi_k(x)$ compris entre x_k et x

$$\text{Donc } |I-S_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Big[\|f'\|_\infty\cdot(x-x_k) + \|f''\|_\infty (x-x_k)^2\Big] dx$$

$$= \|f'\|_\infty \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\Big[\frac{(x-x_k)^2}{2}\Big]_{x_k}^{x_{k+1}} + \|f''\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1}\Big[\frac{(x-x_k)^3}{6}\Big]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$= \|f'\|_\infty \cdot \frac{1}{2n} + \|f''\|_\infty \cdot \frac{1}{6n^2}.$$

<u>Rem.</u> on aurait pu aussi procéder comme au b) (sommes de Darboux)

2.2. Méthode du point milieu : on procède de m :

$\forall k, \forall x \in [x_k, x_{k+1}]$, avec $x_k = \frac{k}{n}$, et $x_{k+1/2} := \frac{k}{n} + \frac{1}{2n}$

$$f(x) = f(x_{k+1/2}) + (x-x_{k+1/2}) f'(x_{k+\frac12}) + \frac{1}{2} f''(x_{k+\frac12})(x-x_{k+\frac12})^2 + (x-x_{k+1/2})^3 \cdot \frac{1}{6} f'''(\xi_k(x))$$

$$\text{Donc } \forall k, \Big|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x)-f(x_{k+1/2}))\,dx\Big| = \Big|\int_{x_k} [\cancel{f(x_{k+1/2})} - \cancel{f(x_{k+1/2})})\,dx + \dots$$

$$\dots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x_{k+1/2})(x-x_{k+1/2})\,dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{2} f''(x_{k+1/2}) \frac{(x-x_{k+1/2})^2}{2}\,dx + \dots$$

$$\dots + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'''(\xi_k(x)) \frac{(x-x_{k+1/2})^3}{6}\,dx\Big| \leq 0 + \|f'\|_\infty \cancel{\Big[\frac{(x-x_{k+1/2})^2}{2}\Big]_{x_k}^{x_{k+1}}} + \dots$$

$$\dots + \|f''\|_\infty \Big[\frac{(x-x_{k+1/2})^3}{6}\Big]_{x_k}^{x_{k+1}} + \|f'''\|_\infty \cdot \Big[\frac{(x-x_{k+1/2})^4}{24}\Big]_{x_k}^{x_{k+1}}.$$

Finalement, on obtient

$$|I - S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_{k+1/2}))\,dx\right|$$

$$\leq n\|f''\|_\infty \cdot \frac{1}{24n^3} + n\|f'''\|_\infty \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{8n^4}$$

Ex. 3 :

3 programmes. Un exemple de courbes

```
function [z]=g(t,x)
  z=x*x
  endfunction



//
xbasc
t0=0;tf=0.33;x0=3;nh=101;
[t,x,xex]=schemaexpl_exact(g,t0,tf,x0,nh);
plot2d(t,[x,xex], style=[2,5]


//
function [t,x,xex]=schemaexpl_exact(g,t0,tf,x0,nh);
//Par exemple, t0=0;tf=0.33;x0=3;nh=101;
//mais on a decide d'entrer ces parametres dans le
//programme "principal", qui trace les courbes
t=linspace(t0,tf,nh)';
x=t;xex=t;
//schema explicite :
x(1)=x0;
h=(tf-t0)/(nh-1);
for i=2:nh
  tim1=t(i-1);
  x(i)=x(i-1)+h*g(tim1,x(i-1))
end
//Sol exacte :
xex=(1)./((1)./x0 - t);
endfunction
```