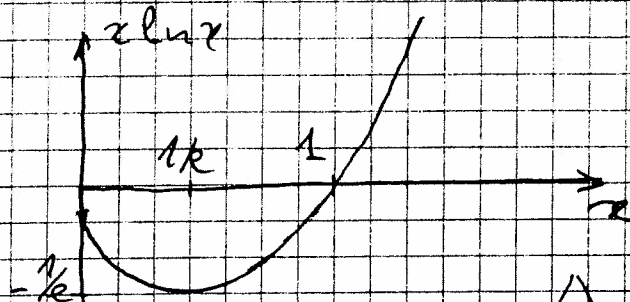


L3-Math. Analyse Numérique -
TD1 : corrigé succinct.

(1)

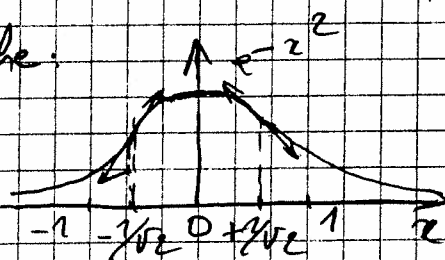
Ex. 1 : (i) $f(x) = x \ln x$ est définie, $C^0, C^1, \dots, C^\infty$ sur son domaine de définition $D_f =]0, +\infty[$, on peut la prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$; $f'(x) = 1 + \ln x$, $f''(x) = \frac{1}{x}$.

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+
$f''(x)$	$-\infty$	0	+	+
$f(x)$	0	$-\frac{1}{e}$	0	$+\infty$



comparez avec un tracé sur calculette !!

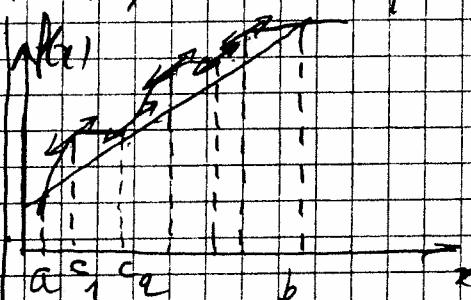
(ii) $f(x) = e^{-x^2}$; $f'(x) = -2xe^{-x^2}$; $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$; $f'''(x) = (-4x + 4x^3)e^{-x^2}$; $f^{(4)}(x) = (12x^2 - 12x^4)e^{-x^2}$.



Ex. 2 : 1. $\forall f \in C^0([a,b]) \cap C^1(]a,b[)$, $\exists c$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.

Donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\exists c \in]0, x[$

tel que $|\sin x - \sin 0| = (x-0) \cos c$
 $\leq |x| \cos c \leq x$



2. (i) $\forall f \in C^n(I)$, $\forall x_0, x \in I = \text{intervalle} \subset \mathbb{R}$

$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \epsilon(x_0; x)$, où $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\epsilon(x_0; x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

(ii) si $f \in C^{n+1}(I)$, alors $\frac{\epsilon(x_0; x)}{(x-x_0)^n} = \frac{(x-x_0)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$, $0 < \theta < 1$.

(Taylor-Lagrange) (iii) exercice. Écrivez la formule de Taylor avec reste intégral.

Ex. 3: 1) Soit f k -lipschitzienne: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$.
 $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \alpha(f, x_0; \varepsilon)$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$.

2) 1) $\forall n \geq 0, |x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}| \leq k^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots \leq k^n|x_1 - x_0|$,
 avec $0 < k < 1$. Donc la série de terme général $(x_{n+1} - x_n)$ est absolument CV, donc CV. Donc la

somme partielle de rang n : $S_n = x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_{n+1} - x_n) = x_{n+1}$
 $\rightarrow S = \sum_{n=0}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n) = l - x_0$. Donc la suite

(x_n) est CV: $x_n \xrightarrow{(n \rightarrow +\infty)} l := S + x_0$. Comme f est continue, $f(x_n) = x_{n+1} \xrightarrow{(n \rightarrow +\infty)} f(l)$. Donc $\exists l$ tel que $f(l) = l$ (*).

2) Ensuite, l est l'unique solution de (*), car si l' est une autre solution, on a: $|f(l) - f(l')| \leq k|l - l'|$

ce qui n'est possible que si $|l - l'| = 0$. $\square$

Ex. 4: 1) $f(x) = 1 + e^x = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(c), 0 < |c| < |x|$
 (Taylor - Lagrange) $= 1 + x \cdot 1 + \frac{x^2}{2} e^c$. Donc $f(x) \geq 1 + x$,
 $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) $|v_{n+1}| \leq (1 + Ch)|v_n| + |u_n| \cdot 1$ (Δ : valeurs absolues)
 $|v_n| \leq (1 + Ch)|v_{n-1}| + |u_{n-1}| \cdot (1 + Ch)$
 $|v_2| \leq (1 + Ch)|v_1| + |u_1| \cdot (1 + Ch)^{n-1}$
 $|v_n| \leq (1 + Ch)|v_0| + |u_0| \cdot (1 + Ch)^n$. Ajoutons:

$|v_{n+1}| \leq (1 + Ch)^{n+1}|v_0| + \sum_{j=0}^n (1 + Ch)^{n-j}|u_j|$. Or $1 \leq 1 + Ch \leq e^{Ch}$, donc
 $|v_{n+1}| \leq (e^{Ch})^{n+1}|v_0| + \sum_{j=0}^n (e^{Ch})^{n-j}|u_j| \leq e^{C(n+1)h} \cdot (|v_0| + \sum_{j=0}^n |u_j|)$

d'où l'inégalité demandée (ici à l'ordre $n+1$), car $t_n - t_0 = nh$. (3)

Exercice 5: 1. $x'(t) = -ax(t)$; schéma d'Euler explicite.

$x_{n+1} = x_n + h f(t_n, x_n) = x_n - ah x_n = (1 - ah)x_n$. En suivant les notations du cours, on a donc posé:

$$L_n(x) = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}, \text{ et remplacé}$$

la solution de l'équation différentielle ordinaire (EDO) $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ (avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$) par la solution du pb discret:

$$\begin{cases} L_n(X) = f(t_n, x_n), \text{ avec la c.i. discrète} \\ X_0 = x_0, \text{ et } X = {}^t(x_0, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

La consistance à l'ordre k s'écrit donc: $\forall x(\cdot) \in C^k$, $\forall n, |x'(t_n) - L_n^t(x(t_0), \dots, x(t_n))| = O(h^k)$.

Ici, on a donc $|x'(t_n) - \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h}| = O(h^k)$. Or

$$\begin{aligned} \left| \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} \right| &= \left| \frac{1}{h} (x(t_n + h) - x(t_n)) \right| = \left| \frac{1}{h} \left[h x'(t_n) + \frac{h^2}{2} x''(\xi) \right] \right| \\ &\quad \text{(Taylor-Lagrange)} \quad 0 < \xi < h \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{t \in [t_0, t_0+h]} |x''(t)| = O(h). \end{aligned}$$

Donc le schéma d'Euler explicite

est consistant à l'ordre 1. Etudions sa convergence:

montrons que $\forall x(\cdot)$ solution de classe C^2 du pb de Cauchy, on a: $\forall n; nh \leq T, |x(t_n) - x_n| \leq C h^k$, avec $k=1$. On repart le dém. du cours sur ce cas particulier. On pose:

$$\begin{aligned} |e_n| &= |x(t_n) - x_n| = \left| x(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(s, x(s)) ds - \left[x_{n-1} + h f(t_{n-1}, x_{n-1}) \right] \right| \\ &= \left| e_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} [f(s, x(s)) - f(t_{n-1}, x_{n-1})] ds \right| \\ &\leq |e_{n-1}| + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (|f(s, x(s)) - f(t_{n-1}, x(s))| + |f(t_{n-1}, x(s)) - f(t_{n-1}, x_{n-1})|) ds \end{aligned}$$

Donc (suite) $|e_{n+1}| \leq |e_n| + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (C_1 |p - t_n| + k |x(p) - x_n|) ds$

$$\leq |e_n| + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (C_1 h + L(|x(s) - x(t_n)| + |x(t_n) - x_n|)) ds,$$

avec $t_n - t_{n-1} = h$, d'où :

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h(C_1 h + L(C_2 |p - t_n| + |e_n|)). \text{ Finalement,}$$

$$|e_{n+1}| \leq (1 + Lh) |e_n| + (C_1 + C_2 L) h^2$$

D'après l'exercice 4, on en déduit que

$$|e_n| \leq e^{Lnh} (|e_0| + (C_1 + C_2 L) h^2 n)$$

$$\leq e^{LT} (|e_0| + (C_1 + C_2 L) Th), \quad \forall n, h \text{ tels que } t_n = nh \leq T$$

(en supposant que $t_0 = 0$)

Donc le schéma d'Euler explicite est convergent à l'ordre 1. Rem. la démonstration se simplifie (exo) pour $f(t,y) = ay$.

2. De même le schéma d'Euler implicite s'écrit :

$$L_n(x) = \frac{x_n - x_{n-1}}{h} = f(x_n) = -ax_n, \text{ avec } a > 0.$$

D'où :

$$\underbrace{(1+ah)}_{\neq 0} x_n = x_{n-1} \Leftrightarrow x_n = \underbrace{\frac{1}{1+ah}}_{\in]0,1[} x_{n-1}$$

Donc $\forall n, \exists ! x_n$ solution de cette équation à l'inconnue x_n . Etudions la consistance :

$$\begin{aligned} \forall x \in C^\infty, & \frac{1}{h} (x(t_n) - x(t_{n-1})) - x'(t_{n-1}) \\ &= \frac{1}{h} [x(t_{n-1}) + [x(t_n) - h x'(t_{n-1})]] \\ &= -\frac{1}{h} + \frac{h^2}{2} x''(c_n), \text{ avec } c_n \in]t_{n-1}, t_n[\end{aligned}$$

Taylor-Lagrange

$$\leq \frac{h}{2} \sup |x''(t)| = O(h). \text{ Le schéma}$$

est donc consistant à l'ordre 1. Etudions la convergence : la même démonstration générale montre encore la convergence à l'ordre 1.

Remarque: stabilité (cf cours) - Pour $f(t, x) = -ax$, avec $a > 0$, on a pour le schéma explicite $x_{n+1} = (1 - ah)x_n$, d'où $x_n = (1 - ah)^n x_0$ et pour le schéma implicite $x_n = \frac{1}{(1 + ah)^n} x_0$. Pour $a \gg 1$, le 1^{er} est stable que si $|ah| < 2$, et le second est inconditionnellement stable. $\square$

6. 1. $x'(t) = ax(t) + b$, d'où $e^{at}(x'(t) - ax(t)) = b e^{at}$.

Donc $\frac{d}{dt}(e^{-at} x(t)) = e^{-at} b(t)$, avec $x(t_0) = x_0$.

En intégrant de 0 à t, on obtient:

$e^{-at} x(t) = e^{-at_0} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-as} b(s) ds$, d'où

$$x(t) = e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-s)} b(s) ds$$

2. si maintenant, on a

$x'(t) \leq ax(t) + b(t)$, $\forall t \in I$, alors le m calcul fournit $x(t) \leq e^{a(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-s)} b(s) ds$, $\forall t \geq t_0$,

car $x'(t) \leq y'(t) \Rightarrow \forall t \geq t_0, x(t) - x(t_0) \leq y(t) - y(t_0)$.

3. maintenant, si $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$, on

applique le m raisonnement:

$$e^{-A(t)} (x'(t) - a(t)x(t)) = e^{-A(t)} b(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(e^{-A(t)} x(t)) = \text{" "}, \text{ d'où}$$

$$x(t) = e^{A(t)-A(t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t)-A(s)} b(s) ds.$$

7 - on a donné le corrigé de l'exercice 5 dans le cas général, en utilisant (cf p4, 1^{er} ligne) le fait que f est lipschitzienne / à x.