1. Sous espaces stables

Rappelons que $V \subset E$ est stable par $g \in End(E)$ si

$g(V) := \{u \mid \exists v \in V, u = g(v)\} \subset V$.

Par exemple $\ker(g)$ est stable par g, $Im(g)$ est stable par g [Exercice]

Plus generalement

proposition Si f et g commutent, alors $\ker(f)$ est stable par g.

◀ si $f(u) = 0$, alors $f(g(u)) = g f(u) = 0$; Donc $g(u) \in \ker(f)$ ▶

La proposition suivante est utile

proposition Soit $f \in End(E)$ de polynome caractéristique P. Soit $V \subset E$ stable par f. Soit P^V le polynome caractéristique de $f|_V$ alors P^V divise P. De plus, si $E = V \oplus W$ avec V et W stables par f on a $P = P^V . P^W$.

◀ Si on complète une base de V en une base de E, la matrice de f s'écrit alors par blocs $\left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ où A est la matrice de $f|_V$

Alors $P(X) = \det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right) - X\,\mathrm{Id}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} A - X\mathrm{Id} & * \\ \hline 0 & B - X\mathrm{Id} \end{array}\right) = \det(A - X\cdot\mathrm{Id})\cdot\det(B - X\cdot\mathrm{Id})$

Donc $P(X) = P^V(X)\cdot\det(B - X\cdot\mathrm{Id})$.

Si de plus $E = V \oplus W$. Alors en choisissant une base de E formé de la réunion d'une base de V et d'une base de W, on a $(*) = 0$ et $\det(B - X\cdot\mathrm{Id}) = P^W(X)$ ▶

Corollaire : si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ où les V_i sont stables par f, alors le polynome caractéristique de f est $\prod_{i=1}^{n} P^{V_i}$; où P^{V_i} est le polynome caractéristique de $f|_{V_i}$.

◀ Cela suit de la proposition précédente et d'une recurrence laissée au lecteur ▶

2. Sous espaces caractéristiques.

Soit λ_i une valeur propre de multiplicité m_i dans le polynome caractéristique.

L'espace $V_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i)^{m_i}$ s'appele sous espace caractéristique. On a évidemment $E_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$

La proposition suivante nous sera utile

Proposition. Un sous espace caractéristique V_λ de f est stable par f. Plus généralement si g commute à f, V_λ est stable par g.

◀ On montre par recurrence que g commute avec f^n, donc avec $P(f)$ si P est un polynome. En particulier $\ker(P(f))$ est stable par g ▶

proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $g \in End(E)$. Pour toute valeur propre λ_i de g on note V_{λ_i} le sous-espace caractéristique correspondant

Alors

(i) V_{λ_i} est stable par g.

(ii) $g|_{V_{\lambda_i}}$ a comme unique valeur propre λ_i

(iii) Si le polynome caractéristique de g est scindé on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} V_{\lambda_i}$$

(iv) $\dim V_{\lambda_i} = m_i$

(v) conséquence matricielle, si le polynome caractéristique est scindé, il existe une base dans laquelle la matrice de g est formée de blocs diagonaux, tous triangulaires superieurs et dont les termes diagonaux sont constants

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & 0 & \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{matrix}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} \} \dim V_{\lambda_1} \\ \} \dim V_{\lambda_2} \\ \\ \end{matrix}$$

◀ (i) Déjà demontré

(ii) Par definition $(g-\lambda_i)^n|_{V_{\lambda_i}} = 0$. Donc $g|_{V_{\lambda_i}}$ annule le polynome $(X-\lambda_i)^n$. Son polynome minimal est donc $(X-\lambda_i)^p$ avec $p \leq n$.

$g|_{V_{\lambda_i}}$ a donc λ_i comme unique valeur propres

(iii) Par definition, le polynome caracteristique de g est $P_\chi = \prod(X-\lambda_i)^{m_i}$. On a Par Cayley-Hamilton $P_\chi(g) = 0$. Donc d'apres le corollaire du paragraphe 4,

$$E = \bigoplus_i \ker(g-\lambda_i)^{m_i} = \bigoplus_i V_{\lambda_i}$$

(iv) Supposons tout d'abord P_χ scindé. D'après (ii) le polynome caracteristique de $g|_{V_{\lambda_i}}$ est $(X-\lambda_i)^{\dim(V_{\lambda_i})}$. D'après (iii) et le corollaire de la section précédente $P_\chi = \prod_{i=1}^{q} (X-\lambda_i)^{\dim(V_{\lambda_i})}$ Donc $p_i = m_i$. Si le polynome caractéristique n'est pas scindé on admet le résultat, ou on considère la matrice de g comme à coefficients dans $\bar{k}$ la clôture algébrique de k

(v) On choisit pour chaque V_{λ_i} une base $(e_1^i, \dots, e_{m_i}^i)$ dans laquelle $g|_{V_{\lambda_i}}$ a une matrice triangulaire supérieure. Cette base existe car le polynome caractéristique de $g|_{V_{\lambda_i}}$ est scindé. Dans la base $(e_1^1, \dots e_{p_1}^1, e_1^2, \dots, e_{p_2}^2, \dots)$ la matrice de g a la forme décrite. ▶ Réciproquement,

proposition [reconnaître un sous-espace caractéristique]

Soit V un sous espace stable par f, telle que $f|_V$ a un polynome caractéristique P_χ scindé et une seule valeur propre λ, alors $V \subset V_\lambda$

En particulier, si $\dim E = m :=$ multiplicité de λ dans P_χ, alors $E = V_\lambda$

◀ Comme $f|_V$ n'a qu'une seule valeur propre λ. le polynome caractéristique de $f|_V$ est donc $(X-\lambda)^{\dim V}$; comme celui-ci divise le polynome caractéristique de f, on a $\dim E \leqslant m$. En particulier par Cayley-Hamilton on a $(f|_V - \lambda)^{\dim V} = 0$ Autrement dit $\forall u \in V$; $(f-\lambda)^{\dim V}(u) = 0$

Comme $\dim V \leqslant m$, $(f-\lambda)^m(u) = (f-\lambda)^{m-\dim V}(f-\lambda)^{\dim V}(u) = 0$

Ainsi $u \in \ker(f-\lambda)^m(u) = V_\lambda$ ▶

Corollaire | $\forall p \in \mathbb{N}$; $\ker(f-\lambda)^p \subset V_\lambda$.

◀ en effet, soit $V = \ker(f-\lambda)^p$. V est stable par f Par ailleurs, $(f|_V - \lambda)^p = 0$ donc $(X-\lambda)^p$ annule $f|_V$. Ainsi $f|_V$ a λ comme unique valeur propre. Par ce qui précède $V \subset V_\lambda$ ▶