Formes bilinéaires sur un corps quelconque

On suppose dans toute la suite que le corps k de base est de caractéristique différente de 2 ; c'est à dire $1+1 \neq 0$

ex : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est de caractéristique 2, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ sont de caractéristique différente de 2.

[Je renvoie au Poly pour les détails]

1) Définitions

Soit E un espace vectoriel sur un corps k, une forme bilinéaire sur E est une application $b : E \times E \to k$ telle que :

(i) $\forall x$: $b_x : y \mapsto b(x,y)$ est linéaire

(ii) $\forall y$: $b^y : x \mapsto b(x,y)$ est linéaire.

La forme bilinéaire est symétrique si

$$b(x,y) = b(y,x)$$

Par la suite toutes les formes bilinéaires sont symétriques.

2) Matrice, noyau, rang

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, et $a_{ij} = b(e_i, e_j)$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$; $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

Alors $b(x,y) = \sum_{i=1, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

La matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice de la forme bilinéaire dans la base $(e_1, \dots, e_n)$

une autre interprétation de A est la suivante.

prop | la matrice A est la matrice de l'application $\varphi_b : E \to E^*$
E muni de $(e_1, \dots, e_n)$, E^* muni de la base duale qui est caractérisée par

$$b(x,y) = \langle \varphi_b(x), y \rangle$$

Le noyau $\ker b$ de la forme linéaire b est

$$\ker b = \{x \mid \forall y \ ; \ b(x,y) = 0\}$$

prop : $\ker(b) = \ker(\varphi_b)$, en particulier $\ker(b)$ est un sous-espace vectoriel

On dit qu'une forme bilinéaire est non dégénérée si $\ker(b) = \{0\}$;

le rang de b est $\operatorname{rg}(b) := \operatorname{codim} \ker(b)$

Dans une base on calcule aisément, noyau et rang comme les noyaux et rang de la matrice associée.

$\cdot \sim \cdot$

Si P est une matrice de changement de base, B la matrice de b dans la nouvelle base, A la matrice de b dans l'ancienne alors

$$\boxed{B = {}^tPAP}$$

3) Forme quadratique associée

La forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique b est l'application : $q : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(x) = b(x,x).$$

On retrouve la forme bilinéaire de départ (appelée forme polaire de la forme quadratique) par la formule de polarisation

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$$

Si $A = (a_{ij})_{ij}$ est la matrice de b dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $q(x) = \sum a_{ii} x_i^2 + \underline{\underline{2}} \sum_{i>j} a_{ij} x_i x_j$

⚠ au facteur 2 : la matrice de $X^2 + 2XY$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) Réduction de Gauss

le théorème suivant est important

Théorème (réduction de Gauss)

1) Toute forme bilinéaire symétrique admet une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

2) Pour toute forme bilinéaire b de rang r, il existe $\ell_1, \dots, \ell_r$ formes linéaires telles que $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i^2(x)$.

Les énoncés 1 et 2 sont facilement équivalents. Pour $(1) \Rightarrow (2)$ il suffit de compléter $\ell_1, \dots, \ell_r$ en une base puis de prendre la base duale

$\cdot \sim \cdot$

Le procédé de réduction de Gauss est purement algorithmique et mieux maîtrisé en exercice. On part d'une forme quadratique dépendant de n variables $q(x_1, \dots, x_n)$

① Cas numéro 1

L'écriture de q fait apparaître un terme $a_n x_n^2$ (c'est à dire $q(e_n) \neq 0$)

But : écrire $q = a_n \ell_n^2 + \hat{q}$
avec $\hat{q} = \hat{q}(x_1, \dots, x_{n-1})$; $\ell_n(0, \dots, 0, x_n) \neq 0$

On écrit alors

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_n x_n^2 + x_n \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}) + \hat{q}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

où f est linéaire $\hat{q}$ quadratique. On écrit alors

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_n \left(x_n + \frac{1}{2a_n} f(x_1, \dots, x_{n-1})\right)^2 + \hat{q}(x_1, \dots, x_{n-1}) - f(x_1, \dots, x_{n-1})^2$$

On a donc

$$q(x_1,\dots,x_n) = a_n \ell_n^2(x_1,\dots,x_n) + \hat{q}(x_1,\dots,x_{n-1})$$

avec $\ell_n(x_1,\dots,x_n) = x_n + \frac{1}{2a_n} f(x_1,\dots,x_{n-1})$

$$\hat{q}(x_1,\dots,x_{n-1}) = \hat{q}(x_1,\dots,x_{n-1}) - f(x_1,\dots,x_{n-1})^2$$

On raisonne ensuite sur $\hat{q}$ qui n'a plus que $n-1$ variables.

Example du cas 1

$$q(x,y) = X^2 + XY + 2XZ + Z^2$$
$$= X^2 + X(Y + 2Z) + Z^2$$
$$= (X + \tfrac{1}{2}Y + Z)^2 - (\tfrac{1}{2}Y + 2Z)^2 + Z^2$$
$$= \underbrace{(X + \tfrac{1}{2}Y + Z)}_{\ell_3(X,Y,Z)} \qquad \underbrace{-\tfrac{1}{4}Y^2 + 2YZ}_{\hat{q}(Y,Z)}$$

② Cas numero 2, un terme X_iX_j est non nul (par exemple X_nX_{n-1})

But : écrire $q = a\ell_1^2 + b\ell_2^2 + \hat{q}$

où $\hat{q}$ ne depend que de $X_1,\dots,X_{n-2}$, et ℓ_1, ℓ_2 independants

$$\ell_1(0,\dots,0,X_{n-1},X_n) \neq 0\,; \quad \ell_2(0,\dots,0,X_{n-1},X_n) \neq 0.$$

On ecrit alors

$$q(X_1,\dots,X_n) = a_n X_n X_{n-1} + X_n f(X_1,\dots,X_{n-2}) + X_{n-1}\, g(X_1,\dots,X_{n-2}) + \hat{q}(X_1,\dots,X_{n-2})$$

où f, g sont linéaires, $\hat{q}$ quadratique

Donc $q(x_1,\dots,x_n)$

$$= a_n\left(X_n + \frac{1}{a_n} g(X_1,\dots,X_{n-2})\right)\cdot\left(X_{n-1} + \frac{1}{a_n} f(X_1,\dots,X_{n-2})\right) + \hat{q}(x_1,\dots,x_{n-2})$$
$$- \frac{1}{a_n}\, g(x_1,\dots,x_{n-2})\, f(X_1,\dots,X_{n-2}).$$

$$= a_n\left(\hat{\ell}(x_1,\dots,x_n)\right)\cdot \hat{\hat{\ell}}(x_1,\dots,x_n) + \hat{q}(x_1,\dots,x_{n-2})$$

où $\hat{\ell}(x_1,\dots,x_n) = x_n + \frac{1}{a_n} g(x_1,\dots,x_{n-2})$

$\hat{\hat{\ell}}(x_1,\dots,x_n) = x_{n-1} + \frac{1}{a_n} f(x_1,\dots,x_{n-2})$

$\hat{\hat{q}}(x_1,\dots,x_{n-2}) = \hat{q} - \frac{1}{a_n} g\cdot f$

Enfin dernière etape on utilise $A\cdot B = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2$ pour obtenir

$$q = a_n\, \ell_1(x_1,\dots,x_n)^2 - a_n\, \ell_2^2(x_1,\dots,x_n) - \hat{\hat{q}}(x_1,\dots,x_{n-2})$$

avec $\ell_1 = \frac{\hat{\ell}+\hat{\hat{\ell}}}{2}$; $\ell_2 = \frac{\hat{\ell}-\hat{\hat{\ell}}}{2}$

On applique ensuite l'algorithme à $\hat{\hat{q}}$ qui n'a plus que $n-2$ variables.

Exemple du cas 2

$$q(X,Y) = XY + 2XZ - YZ$$
$$= (X-Z)(Y+2Z) - 2Z^2$$
$$= \left(\frac{X-Z+Y+2Z}{2}\right)^2 - \left(\frac{X-Z-Y-2Z}{2}\right)^2 - 2Z^2$$
$$= \left(\frac{X+Z+Y}{2}\right)^2 - \left(\frac{X-3Z-Y}{2}\right)^2 - 2Z^2$$

C'est une forme réduite de Gauss avec

$\ell_1(X,Y,Z) = \left(\frac{X+Z+Y}{2}\right)$

$\ell_2(X,Y,Z) = \left(\frac{X-3Z-Y}{2}\right)$

$\ell_3(X,Y,Z) = Z$

L'algorithme de réduction de Gauss produit des forme linéaires indépendants

Ceci est démontré dans le poly.

5) Loi d'inertie de Sylvester.

Théorème [Sylvester]

On suppose que le corps $k=\mathbb{R}$. Soit q une forme quadratique

Il existe alors r formes linéaires independantes $\ell_1, \dots, \ell_r$

telles que $q = \sum_{i=1}^{s} \ell_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} \ell_i^2$

De plus le couple $(s, r-s)$ est independant des formes linéaires choisies

le couple $(s, s-r)$ est la signature de la forme quadratique q

Exemple : la forme $q(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$ est de signature $(1,2)$

Exercice typique : utilisez la reduction de Gauss pour trouver la signature

proposition : si q est de signature (n,m) alors $n+m =$ rang de q

◀ On complète $\ell_1, \dots, \ell_{n+m}$ en une base de E^*. Dans la base duale

q est de matrice diagonale avec n 1, et m -1. ▶

Démonstration de Sylvester :

◀ On se place tout d'abord dans le cas où $r = \dim E$

On suppose donc que $q = \sum_{i=1}^{s} \ell_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} \ell_i^2$ (i)

et $q = \sum_{i=1}^{\hat{s}} \hat{\ell}_i^2 - \sum_{i=\hat{s}+1}^{r} \hat{\ell}_i^2$ (ii)

Supposons $s > \hat{s}$. Soit alors $V = \mathrm{Vect}(\ell_{s+1}, \dots, \ell_r)^{\perp}$

Alors d'après (i), q restreinte à V

s'écrit $q|_V = \sum_{i=1}^{s} \ell_i^2$; donc pour tout

v de V on a $q(v) \geq 0$, si $q(v)=0$, alors $\forall i$ $\ell_i(v)=0$ donc $v=0$.

En conclusion, q restreinte à V est definie positive.

Soit $W = \mathrm{Vect}(\hat{\ell}_1, \dots, \hat{\ell}_{\hat{s}})^{\perp}$, le même raisonnement montre que q/W est definie négative. Or $\dim V = n-(n-s) = s$; $\dim W = n-\hat{s}$

$$\text{donc } \dim(V\cap W) = -\dim(V+W) + \dim V + \dim W \geqslant -n+s+n-\hat{s} \geqslant 1$$

On obtient la contradiction en montrant que $q|_{V\cap W}$ est à la fois definie positive et definie negative.

Pour faire la démonstration dans le cas generale, on remarque que $(\ell_1, \dots, \ell_r)$ forme une base de $(\ker q)^\perp$. On peut donc trouver $(\mu_{r+1}, \dots, \mu_n)$ tel que

(i) $(\ell_1, \dots, \ell_r, \mu_{r+1}, \dots, \mu_n)$ est une base

(ii) $(\hat{\ell}_1, \dots, \hat{\ell}_r, \mu_{r+1}, \dots, \mu_{n+1})$ est une base

Et on utilise le raisonnement précédent sur $\bar{q} = q + \sum_{i=r+1}^{n+1} \hat{\mu}_i^2$ ▶

·—·

En dimension 2, la signature se calcule aisément. (En anticipant sur le cours suivant)

Si B est la matrice d'une forme quadratique en dimension 2 on a

$\det B < 0 \Leftrightarrow$ signature $= (1,1)$

$\det B > 0$ et trace $B > 0 \Leftrightarrow$ signature $(2,0)$

$\det B > 0$ et trace $B < 0 \Leftrightarrow$ signature $(0,2)$

$\det B = 0$ et trace$(B) > 0 \Leftrightarrow$ signature$(1,0)$

$\det B = 0$ et trace$(B) < 0 \Leftrightarrow$ signature$(0,1)$

$\det B = 0$ et trace $B = 0 \Leftrightarrow$ signature $(0,0)$

En dimension plus grande, on peut être amener à calculer une reduite de Gauss.