Définitions

Un espace euclidien (E,q) est un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme définie positive. Son produit scalaire est la forme bilinéaire associée. On le notera $u,v \mapsto \langle u|v\rangle$. La norme euclidienne est alors

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle} = \sqrt{q(x)}$$

On a alors $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

Les vecteurs u et v sont orthogonaux si $\langle u|v\rangle = 0$.

Proposition : l'application $E \to E^* : u \mapsto \lambda_u$ telle que $\lambda_u(v) = \langle u|v\rangle$ est un isomorphisme. En particulier pour toute forme linéaire ℓ il existe un vecteur u unique tel que $\forall v \in E$; $\ell(v) = \langle u|v\rangle$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

On a l'inégalité $|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$

Avec l'égalité si et seulement si x et y sont colinéaires

◀ On considère $q(x+\lambda y)$.

On a $q(x+\lambda y) = q(x) + 2\lambda\langle x|y\rangle + \lambda^2 q(y) = P(\lambda)$

Ce polynome P est toujours positif, son discriminant est donc $\leqslant 0$

Or son discriminant réduit est $\langle x|y\rangle^2 - q(x)\cdot q(y)$.

L'inégalité de C.S suit.

Si maintenant on est dans le cas d'égalité (et $y \neq 0$)

Alors $P(\lambda)$ a une racine λ_0, on a donc $q(x+\lambda_0 y) = 0$

et donc $x = -\lambda_0 y$ ▶

Corollaire : $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ avec égalité si $x = \lambda y$ et $\lambda > 0$

◀ En passant au carré on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$

$$\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$$ ▶

Orthogonalité pour un produit scalaire

Soit $(E, \langle\,|\,\rangle)$ un espace euclidien et $V \subset E$

Alors $V^\perp = \{v \in E \,/\, \forall w \in V \ \langle v|w\rangle = 0\}$

On a alors $V \cap V^\perp = \{0\}$

◀ si $v \in V \cap V^\perp$; alors $\langle v|v\rangle = 0$ donc $v = 0$ ▶

L'identification de E avec E^* donnée

Proposition $\dim V^\perp = \dim E - \dim V$

$(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$

$V \subset W \Leftrightarrow W^\perp \subset V^\perp$

$(V^\perp)^\perp = V$

On en déduit le résultat important

$V \oplus V^\perp = E$; l'orthogonal est un supplémentaire

Base orthonormée

Une base $(e_i)_i$ d'un espace euclidien est orthonormée si

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$$

[procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt]

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E, il existe alors une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ telle que

$$\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \ \forall k.$$

◀ On raisonne par recurrence : Posons $F_k = \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_k)$.

On a donc $F_k \subset F_{k+1}$; $\dim F_k = k$.

Soit $W_k = F_k^{\perp}$ alors ; $W_k + F_{k+1} \supset W_k + F_k = E$

$$\dim W_k \cap F_{k+1} = -\dim(W_k + F_{k+1}) + \dim(W_k) + \dim(F_{k+1})$$
$$= -n + (n-k) + k+1$$
$$= 1$$

On choisit alors $\hat{e}_k \in W_k \cap F_{k+1}$ et $\hat{e}_k \neq 0$

On pose enfin $e_k = \dfrac{\hat{e}_k}{\|e_k\|}$

Soit alors i, j, supposons $i > j$. On a alors

$e_i \in F_j^{\perp}$, en particulier $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ ▶

le procédé fonctionne comme un algorithme.

le produit scalaire se calcule bien dans une base orthonormée et on a

En particulier

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle\langle y|e_i\rangle$$

Matrice de Gram

Soit $(f_1,\dots,f_k)$ k vecteurs de E, la matrice de Gram associée est la matrice $k \times k$

est $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = \langle f_i | f_j \rangle$

Ainsi la matrice de Gram d'une base orthonormée est l'identité

Proposition le rang de la matrice de Gram est le rang de $(f_1,\dots,f_k)$.

◀ On commence par ordonner $(f_1,\dots,f_k)$ de façon à ce que $(f_1,\dots,f_n)$ soit une base de $\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_k)$

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_k)$

Soit P la matrice $n\times k$ dont les colonnes sont les coordonnées de f_i dans la base $(e_1,\dots,e_n)$. Autrement dit $p_{ij} = \langle e_i | f_j\rangle$

Alors ${}^tP\cdot P = \mathrm{Gram}(f_1,\dots,f_k) := A$

Si $k=n$, alors P est inversible et donc A aussi.

Si $k>n$, A contient comme mineure $\mathrm{Gram}(f_1,\dots,f_n)$ qui est inversible donc le rang de A est $\geqslant n$. Enfin, comme $\dim(\mathrm{Im}(f\circ g)) \leqslant \dim \mathrm{Im}\, g$

$$\mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{rg}(P) = n. ▶$$

Nous venons de voir dans la preuve : Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_k)$, Soit P la matrice dont les colonnes sont les coefficients de f_i dans la base e_i, autrement dit $p_{ij} = \langle f_j | e_i\rangle$;

$$\text{Alors } \boxed{{}^tP.P = A}$$

En particulier.

la matrice de changement de base entre deux bases orthonormées vérifie ${}^tP = P^{-1}$

Diagonalisation des matrices symétriques

On dit que $f \in \mathrm{End}(E)$ est symétrique si $\langle f(u)|v\rangle = \langle u | f(v)\rangle$

proposition (exercice) f est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique

On a également

Proposition Soit $V \subset E$, stable par f ; alors $V^\perp$ est stable par f.

◀ Soit $w \in V^\perp$, alors $\forall v \in V$; $\langle f(w) | v \rangle = \langle w | f(v) \rangle = 0$ donc $f(w) \in V^\perp$ ▶

Proposition Tout endomorphisme symétrique admet un vecteur propre.

◀ Il suffit de démontrer le résultat pour A symétrique appartenant à $M_n(\mathbb{R})$

Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{C}^n$, tel que $Au = \lambda \cdot u$

Alors si $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$, on a

$$A\bar{u} = \bar{\lambda} \cdot \bar{u}$$

On considère la forme bilinéaire $b((z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n)) = \sum_1^n z_i w_i$

Alors $b(Az, w) = b(z, Aw)$

En particulier $b(Au, \bar{u}) = b(u, A\bar{u})$

Donc $\lambda b(u, \bar{u}) = \bar{\lambda}\, b(u, \bar{u})$. Comme $b(u, \bar{u}) = \sum_1^n u_i \bar{u}_i \neq 0$

On a $\lambda = \bar{\lambda}$. Le polynome caractéristique de A admet une racine réelle et le résultat suit ▶

Corollaire

Toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée

◀ La preuve se fait par récurrence. Soit u un vecteur propre de f tel que $\|u\| = 1$

Soit $F = (\mathrm{Vect}(u))^\perp$.

F est stable par f. Par récurrence, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de F de vecteurs propres. Alors $(u, e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base orthonormée ▶

Matrices et endomorphismes orthogonaux.

Un endomorphisme f d'un espace euclidien E est orthogonale si

$$\forall u, v \in E \; ; \; \langle u | v \rangle = \langle f(u) | f(v) \rangle$$

Une matrice P est orthogonale si $P^t P = Id$. Remarquons qu'une matrice orthogonale a un déterminant ± 1.

proposition

f orthogonale $\Leftrightarrow$ l'image par f d'une base orthonormée est orthonormée

$\Leftrightarrow$ la matrice de f dans une base orthonormée est orthogonale

Projection orthogonale

Rappelons qu'un projecteur vérifie $p^2 = p$. Alors nous avons

Soit p un projecteur, alors

p symétrique $\Leftrightarrow \ker p = \operatorname{Im} p^{\perp}$

On dit alors que p est un projecteur orthogonal. ⚠ cette terminologie est incohérente avec la précédente : Un projecteur orthogonal n'est pas un endomorphisme orthogonal (sauf si il est l'identité)

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de F la projection orthogonale p sur F est donnée par $p(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u | e_i \rangle e_i$.

Si $(f_1, \dots, f_k)$ est une base de $F^{\perp}$, la projection p sur F est donnée par

$$p(u) = u - \sum_{i=1}^{k} \langle u | e_i \rangle e_i$$