## 1.) Definition

Soit $E$ un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous espace vectoriel de $E$

On a alors une relation d'equivalence $\sim$ sur $E$ definie par

$u \sim v \Leftrightarrow u - v \in F$

On note $E/F$ l'ensemble des classes d'equivalence et $p$ la projection $E \to E/F$

**proposition** $E/F$ admet une structure d'espace vectoriel tel que $p$ est linéaire

◀ Ceci découle des propriétés suivants

(i) $p(u) = p(v) \Rightarrow p(\lambda u) = p(\lambda v)$ ; $\forall \lambda \in k, u, v \in E$

On définit alors sans ambiguïté pour $\lambda \in k, w \in E/F$

$$\lambda \cdot w := p(\lambda u) \text{ si } w = p(u)$$

(ii) $p(u_1) = p(v_1)$ ; $p(u_2) = p(v_2)$

$\Rightarrow p(u_1 + u_2) = p(v_1 + v_2)$

On définit alors si $w_1 \in E/F$ ; $w_2 \in E/F$ (à nouveau sans ambiguïté)

$$w_1 + w_2 := p(u_1 + u_2) \text{ avec } w_1 = p(u_1) ; w_2 = p(u_2)$$ ▶

Rque : ceci est bien analogue à la definition de groupes quotients

## 2) Espaces vectoriels quotients et applications linéaires.

Nous avons deux propositions utiles

**proposition** Soit $g : E \to H$ une application linéaire telle que $F \subset \ker(g)$ ; Alors il existe une unique application $h : E/F \to H$ telle que $g = h \circ p$

On résume cette proposition par un petit dessin

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & H \\ E/F \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

◀ La démonstration est élémentaire :

On remarque que puisque $F \subset \mathrm{Ker}(g)$, alors

$$p(u) = p(v) \Longrightarrow g(u) = g(v) \quad (*)$$

On pose alors (sans ambiguïté)

$$h(w) = g(u) \text{ si } p(u) = w$$

Par $(*)$, $h(w)$ ne dépend pas du choix de $u$.

On vérifie (exercice) que $h$ est linéaire.

Par construction $h(p(u)) = g(u)$ ▶

Cette proposition a un corollaire

<u>Corollaire</u> Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ telle que $f(F) \subset F$

Alors il existe $h \in \mathrm{End}(E/F)$ tel que

$$h \circ p = p \circ f$$

Le petit dessin associé est

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ E/F \arrow[r, dashed, "h"'] & E/F \end{tikzcd}$$

◀ Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $g = p \circ f$ [Exo] ▶