A| Une base de $H^\perp$ est $\{(0,1,0,1), (1,0,-1,0)\}$

Le processus de Gram-Schmit appliqué à v_1, v_2 donne la base orthonormée

$\{\frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,1) ; \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1,0)\} = \{e_1, e_2\}$. La projection orthogonale est $p(u) = u - \langle v|e_1\rangle e_1 - \langle v|e_2\rangle e_2$

donc $p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(y+t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(x-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$

La matrice de p est donc $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B| La matrice de q est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

La reduction de Gauss donne $(x+2y-z)^2 - 4y^2 - z^2 + 4yz + 6yz + 4y^2 + z^2$

$= (x+2y-z)^2 + 2yz = (x+2y-z)^2 + \frac{5}{2}\left((y+z)^2 - (y-z)^2\right)$

La signature de q est donc $(2,1)$

C

1. Calculons le polynome caractéristique de A.

$$P_A(\lambda) = -\begin{vmatrix} -3-X & 1 & 2 \\ -3 & -1-X & 3 \\ -5 & 1 & 4-X \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1-X & 1 & 2 \\ 0 & -1-X & 3 \\ -1-X & 1 & 4-X \end{vmatrix} = (1+X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1-X & 3 \\ 1 & 1 & 4-X \end{vmatrix}$$

$$= (1+X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1-X & 3 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (X-2)(1+X)^2$$

$$E_{-1} = \ker \underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -5 & 1 \end{matrix} & 5 \end{vmatrix}}_{B}$$; la mineure $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ donc B est de rang 2

Ainsi $\dim E_{-1} = 1$

La reduite de Jordan est donc $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. On cherche maintenant u, tq $A(u) = 2u$, $A(v) = -v$ et $A(w) = -w + v$

Pour $u = (x,y,z)$ est donc solution de $\begin{cases} -5x+y+2z=0 \\ -3x-3y+3z=0 \\ -5x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x+y+2z=0 \\ z = x+y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x+y \\ 3x = 3y \end{cases}$; une solution est $u = (1,1,2)$

v est solution de $\begin{cases} -2x+y+2z \\ +3x-3z=0 \\ -5x+y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ z=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=x \end{cases}$

un vecteur v est $(1,0,1)$.

w est solution de $\begin{cases} -2x+y+2z=1 \\ +3x-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=z \end{cases}$; $w=(0,1,0)$ convient

la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient et verifie $R = P^{-1}AP$.

D] 1- le polynome caracteristique de B est, B étant triangulaire par blocs,

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 9 & -3-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4-\lambda & -8 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4$$

B est bien nilpotente

2- Cherchons le noyau de B $= \ker\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker\left(\begin{matrix} 9 & -3 & 3 \\ 9 & -3 & \end{matrix}\right.$

$$= \ker\begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 & -21 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 & -21 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

donc $rg(B) = 2$. De même

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & +4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & +4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc l'indice de nilpotence de B est 2.

En conclusion B est de rang 2, d'indice de nilpotence 2. Sa reduite de Jordan

est donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

E) Il faut calculer $B(1,1)$, $B(1,x)$ et $B(x,x)$. Ce qui donne

$$B(1,1) = 2b \; ; \; B(1,x) = \frac{2a}{3} \; ; \; B(x,x) = \frac{2b}{3}$$

1 – La matrice de B est donc $\begin{pmatrix} 2b & 2a/3 \\ 2a/3 & 2b/3 \end{pmatrix} = M$

2 – Pour que B soit un produit scalaire il faut que $tr(M) > 0$ et $det(M) > 0$

c'est à dire $b > 0$ et $b^2 - \frac{a^2}{3} > 0$ (ou $\sqrt{3}\, b > |a|$)

3 – On a pour $b = a = 1/2$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, si on applique Gram-Schmidt à $(v_1, v_2) = (1, X)$

On obtient $e_1 = 1$; $\hat{e}_2 = X - \frac{1}{3}$. ; $\|\hat{e}_2\|^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1+3-2}{9} = \frac{2}{9}$

donc $\|\hat{e}_2\| = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(3X-1)$

Une base orthonormée est donc $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}(3X-1)\right)$