Groupes agissant sur un ensemble

1. Définitions

Soit G un groupe et E un ensemble. Une action à gauche de G sur E est donné par une application

$$G \times X \to G$$

$$(g,x) \mapsto g \cdot x$$

telle que $h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x \quad (*) \qquad e \cdot x = x$

En particulier, $\forall g$ l'application $\varphi(g) : x \to g \cdot x$ est une bijection d'inverse $\varphi(g^{-1})$.

De manière equivalente une action a gauche est donnée par un morphisme $\varphi : G \mapsto Bij(E)$; $\varphi(g)(x) := g \cdot x$.

On definit également les actions à droite :

$$(g,x) \to x \cdot g \quad \text{où} \quad x \cdot (gh) = (x \cdot g) h$$

Une action à gauche definit une relation d'équivalence sur x

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G, \; x = g \cdot y$$

la classe d'équivalence d'un point est appelée orbite. L'orbite de x est donc $G \cdot x$. le stabilisateur de x est

$$Stab(x) = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}$$

Proposition (i) $Stab(x)$ est un sous groupe de G

(ii) $Stab(g \cdot x) = g \cdot Stab(x) \cdot g^{-1} = \{ g h g^{-1} \mid h \in Stab_x \}$

On note alors $G \backslash X$ l'ensemble des orbites de l'action de G

Examples : (i) l'action de G sur lui-même $g, h \mapsto gh$

(ii) l'action de G sur lui même par conjugaison

$$(g,h) \mapsto g h g^{-1}$$

(iii) $GL(E) \times E \to E$; $(g,u) \mapsto g \cdot u$

(iv) On considère l'ensemble $Q(E)$ des formes quadratiques symétriques sur E, $G = GL(E)$

a) Montrez que $G \times Q(E) \to Q(E)$

$(g,q) \mapsto g^{*}q \quad q \circ g$ est une action à droite

b) Quel est le stabilisateur d'un point

c) Montrez qu'il n'y a qu'un nombre fini d'orbites et les caractériser

c) Soit A la matrice de q, quelle est la matrice de $g^{*}q$

(v) On considère l'action de $GL(E)$ sur $End(E)$;

(vi) On considère l'action de $O(E)$ sur $Sym(E)$ = matrices symétriques $g \cdot A \bar{g}' = g_{*} A$, montrez qu'il s'agit bien d'une action

a) caractériser les orbites ? b) Si A a toutes ces valeurs propres distinctes, quel est le stabilisateur de A

On suppose que $G \curvearrowright X$ (agit). Soit $Y \in X$, on dit que

Y est stable par G si $\forall y \in Y, \forall g \in G \quad g \cdot y \in Y$

On dit de plus que G agit transitivement sur Y si $\forall (x,y) \in G$ il existe $g \in G$ tel que $gx = y$. Pour vérifier que $Y \subset G$ est une orbite, on vérifie que Y est stable, puis que G agit transitivement sur Y.

2. Formules orbitales

Formule orbitale

Supposons $\#X$ et $\#G$ fini. Alors

(i) $\#Gx = \#G / \#Stab_x$ — Formule des classes

(ii) $\#X = \sum_{[y] \in G\backslash X}' \#G / \#Stab(y)$

(iii) $\# G\backslash X = \frac{1}{\#G} \sum_{x \in X}' \# Stab(x)$ — Formule de Burnside

◀ On considère $f : G \to G.x\,;\ g \mapsto gx$. Alors $f^{-1}(y) = \{g \mid gy = x\}$

Si $y = g_0 x$; on a une bijection de $f^{-1}(y)$ avec $Stab_x$ donnée par

$h \to hg_0$. La formule (i) suit de $Z = \sum_{u \in f(Z)}' f^{-1}\{z\}$; car $Z = \bigsqcup_{u \in f(z)} f^{-1}(z)$.

(ii) suit alors de (i) et de $X = \bigsqcup_{[y] \in G\backslash X} [y]$.

l'application $u \mapsto gug^{-1}$ est une bijection de $Stab_x$ sur $Stab_{gx}$

et donc $\# Stab_x = \# Stab_{gx}$, donc pour (iii), on écrit

$\sum_{x \in X}' Stab_x = \sum_{[y] \in G\backslash X}' \left(\sum_{x \in [y]}' Stab_x \right) = \sum_{y \in G\backslash X}' Stab_x \cdot \frac{\#G}{Stab_x} = \#G \cdot (\# G\backslash X)$ ▶

Application : Théorème de Lagrange

: si G est fini et H est un sous groupe de G alors $\#H$ divise $\#G$.

◀ On considère l'action de H sur G : $(h,g) \mapsto hg$. Le stabilisateur de chaque pt est réduit à $\{e\}$. Donc $\#H.x = \#H$ $\forall x$ et donc $\#G = (\# G/H) \cdot \#H$ ▶