Géométrie euclidienne

1. Rappels

Un espace euclidien est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire :

$$u,v \longmapsto \langle u,v\rangle$$

(i) bilinéaire

(ii) $\langle u,u\rangle \geqslant 0$ avec $=$ si et seulement si $u=0$

La norme est définie par $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$$

On rappelle $|\langle u,v\rangle| \leqslant \|u\|\cdot\|v\|$ avec $=$ si colinéaires (Cauchy-Schwarz)

$\|u+v\| \leqslant \|u\|+\|v\|$; (Inégalité triangulaire)

Une base $e_1,\dots,e_n$ est orthonormée si $\|e_i\|=1$, $\langle e_i|e_j\rangle=0$ si $i\neq j$

Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Si $V\subset E$ est un s.e.v, $V^\perp=\{v\in E \mid \forall w\in V, \langle v|w\rangle=0\}$ est l'orthogonal de V

prop (dim finie) $V^\perp$ est un s.e.v ; $V\oplus V^\perp = E$; $(V^\perp)^\perp = E$, $(V+W)^\perp = V^\perp\cap W^\perp$

Soit $A\in GL(E)$; A est orthogonale si $\forall u$; $\|A(u)\|=\|u\|$.

prop : A orthogonale $\Leftrightarrow$ $\langle Au|Av\rangle = \langle u|v\rangle$

A orthogonale $\Leftrightarrow$ la matrice M de A dans une base orthonormée satisfait $M^tM=1$.

A orthogonale $\Leftrightarrow$ l'image d'une base orthonormée est orthonormée

A orthogonale $\Rightarrow$ $(A(H))^\perp = A(H^\perp)$ si $H\subset E$ est un s.e.v

A orthogonale $\Rightarrow$ $(\det A)^2 = 1$

2. Le groupe orthogonal

Le groupe orthogonal est

$$O(E) = \{ f \in GL(E) ;\ f \text{ orthogonal} \}$$

$$O_n(\mathbb{R}) = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) ;\ M^t M = 1 \}$$

$O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont des sousgroupes de $GL(E)$ et $GL_n(\mathbb{R})$ respectivement. Le choix d'une base orthonormée défini un isomorphisme de $O(E)$ avec $O_n(\mathbb{R})$

On définit $SO_n(\mathbb{R}) = \{ M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det M = 1 \}$ le groupe spécial orthogonal

$$SO(E) = \{ A \in O(E) \mid \det A = 1 \}$$

$SO(E)$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des sousgroupes distingués de $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$ respectivement ; $[O(E) : SO(E)] = 2$

En petites dimensions

(i) $O_1(\mathbb{R}) = \{+1, -1\}$; $SO(1) = 1$

(ii) $O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \right\}$

$\uparrow SO_2(\mathbb{R})$

Théorème Soit $\sigma \in O(E)$; il existe alors des sous espaces vectoriels $V, W, P_1, \dots, P_k$ deux à deux orthogonaux avec

(i) $\dim P_i = 2$

(ii) $\sigma|_V = \mathrm{Id}$; $\sigma|_W = -\mathrm{Id}$; $\sigma|_{P_i} =$ rotation d'angle P_i

(iii) $V \oplus W \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_k = E$

—

Démontrons tout d'abord le lemme

Lemme : Toute transformation orthogonale admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2

◀ $A+\bar{A}'$ est symétrique. Soit u un v.p non nul $A+\bar{A}'$. Posons

$P=\langle u,\bar{A}'(u)\rangle$; alors (i) $\dim P=1$ ou 2

$Au=\lambda u-\bar{A}'(u)\in P$; et $A(\bar{A}'(u))=u\in P$; donc $A(P)\subset P$ ▶

On demontre le theorème par recurrence sur la dimension. On considère

$H=P^{\perp}$ et on applique l'hypothèse de recurrence à $\sigma|_H$

3. Reflexions hyperplanes

Un hyperplan H d'un espace vectoriel E est le noyau d'une forme linéaire non nulle. De manière équivalente on a $\dim E=\dim H+1$

Si $(E,\langle\,,\rangle)$ est euclidien, la symétrie hyperplane σ par rapport à H est donnée par

$$\sigma|_H=\mathrm{Id}\ ;\ \sigma|_{H^{\perp}}=-\mathrm{Id}.$$

exo : $\sigma=2\pi-\mathrm{Id}$ si π projection $\perp$ de $E\to H$

prop : Une symétrie hyperplane est orthogonale

Si σ est une symétrie hyperplane, alors $\sigma^2=1$

σ est l'unique transformation orthogonale telle que

$$\sigma\neq\mathrm{Id}\ ;\ \sigma|_H=\mathrm{Id}.$$

◀ On utilise une base orthogonale $(e_1,\dots,e_n)$ telle que

$H=\langle e_1,\dots,e_{n-1}\rangle$ ▶

Théorème Toute transformation orthogonale est le produit de symetrie hyperplanes

On va demontrer le résultat par récurrence

a) On suppose qu'il existe u tel que $\sigma(u)=u$

Soit $H=\langle u\rangle^{\perp}$; alors $\sigma|_H\in O(E)$. On peut alors ecrire

$\sigma|_H = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n$ avec σ_i hyperplanes $\in O(H)$

Soit H_i l'hyperplan de H associé à σ_i ; Soit $\hat{H}_i = H_i \oplus \langle u \rangle$

et $\hat{\sigma}_i \in O(E)$ la reflection hyperplane / à $\hat{H}_i$ alors

$$\hat{\sigma}_i \,|\, \hat{H}_i = \mathrm{Id} \, ; \quad \hat{\sigma}_i \,|\, \hat{H}_i^{\perp} = -\mathrm{Id}$$

Alors $\hat{\sigma}_i(u) = u$; $\hat{\sigma}_i|_H = \sigma_i$. On a alors

$\Psi = \sigma - \hat{\sigma}_1 \circ \cdots \circ \hat{\sigma}_n = 0$. En effet $\langle u \rangle \in \ker \Psi$ et $H \in \ker \Psi$

Donc $\ker \Psi \supset \langle u \rangle + H = E$.

b) Sinon soit $v \neq 0$ tel que $\sigma(v) \neq v$. Soit $w = \sigma(v) - v$

et σ_0 la symetrie hyperplane par rapport à $\langle w \rangle^{\perp}$.

Remarquons que $\langle \sigma(v) - v \,|\, \sigma(v) + v \rangle = \langle \sigma(v) | \sigma(v) \rangle - \langle v | v \rangle$

$+ \langle \sigma(v) | v \rangle - \langle v | \sigma(v) \rangle = 0$

Alors $\sigma_0(\sigma(v) - v) = v - \sigma(v)$; $\sigma_0(\sigma(v) + v) = \sigma(v) + v$

Donc $\sigma_0(\sigma(v)) = v$ et $\sigma_0(\sigma(v)) = v$.

En particulier $(\sigma_0 \circ \sigma)(v) = v$. On applique 1) à la

transformation orthogonale $\sigma_0 \circ \sigma$ qui est donc $= \sigma_1 \cdots \sigma_n$ avec σ_i

symétries hyperplanes . Donc $\sigma = \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_n$ (car $\sigma_0^2 = 1$) ▶

Example Si $A \in O(2) \setminus SO(2)$; alors $A^2 = 1$;

A admet donc 1 comme v.p ; On trouve donc une base telle que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

— .

Si $A \in SO(2)$ et $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; alors $\sigma_0 \circ A \notin SO(2)$; donc

$\sigma_0 \circ A$ est une reflection