geometre affine : resumé

1. Sous espace affine

des proprietés suivantes sont équivalentes, lorsque V est un espace vectoriel

(i) $\mathcal{V}$ sous espace affine de $\mathcal{E}$, d'espace tangent V

(i) $\exists\, O \in \mathcal{V},\ \{\overrightarrow{OP} \mid P \in \mathcal{V}\} = V$

(ii) $\forall\, O \in \mathcal{V};\ \{\overrightarrow{OP} \mid P \in \mathcal{V}\} = V$

(iii) $\{\overrightarrow{MP} \mid M \in \mathcal{V},\ P \in \mathcal{V}\} = V$

prop

(a) Deux sous espaces affines sont parallèles s'ils ont le même espace tgt

(b) Soit $M \in \mathcal{E}$, il existe un seul sous espace affine passant par M d'espace tangent V

(c) Si $\{\mathcal{V}_i\}_{i\in I}$ sont des sous espaces affines d'espaces tangents V_i alors

- Soit $\bigcap_{i\in I} \mathcal{V}_i = \emptyset$
- Soit $\bigcap_{i\in I} \mathcal{V}_i$ est un espace affine d'espace tangent $\bigcap_{i\in I} V_i$

prop : Soit $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires <u>indépendants</u>

Soit $b_1, \dots, b_n \in K$. Soit $O \in \mathcal{E}$ alors

$\mathcal{V} := \{M \in \mathcal{E} \mid f_i(\overrightarrow{OM}) = b_i$ pour tout $i\}$ est un

sous espace affine (non vide) de $\mathcal{E}$ dont l'espace tangent

est $\{u \in E \mid f_i(u) = 0$ pour tout $i\}$

le système $\{f_i(M-O) = b_i\}$ est un système d'equations cartésiennes de $\mathcal{V}$. Tout sous espace affine (en dimension finie) admet un système d'equations cartésiennes

Soit $A \subset \mathcal{E}$, $\mathrm{Aff}(A)$, l'espace affine engendré par A est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant A. C'est un sous espace affine

2. En petites dimensions : problèmes classiques

En général on a choisi un repère de telle sorte que $\mathcal{E} \approx \mathbb{R}^n$

1) Savoir si deux espaces affines dont on a les équations cartésiennes sont parallèles ?

a) hyperplans $H_i = \{M \mid f_i(M-O) = b_i\}$

la question est alors de savoir si $f_1 \propto f_2$.

b) droites $D_i = \{M \mid f_i(M-O) = b_i \; ; \; g_i(M-O) = c_i\}$

Il faut savoir si $\langle f_1, g_1 \rangle = \langle f_2, g_2 \rangle \subset E^*$

autrement dit en coordonnées : $D_1 /\!/ D_2$ si et seulement si les déterminants $|f_1 \, g_1 \, g_2|$ et $|f_2 \, g_1 \, g_2|$ sont tous deux nuls.

(Autre méthode) On trouve des vecteurs directeurs u_1 et u_2 de D_1 et D_2 en trouvant une solution non nulle de $\{f_i(u_i) = 0, g_i(u_i) = 0\}$

2) Soit D_1 et D_2 deux droites d'équations $\{f_i(M-O) = b_i, g_i(M-O) = c_i\}$ pour $i \in \{1,2\}$ respectivement.

On a alors $\dim \mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2) = 1 \iff D_1 = D_2$

$\dim \mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2) = 2 \iff D_1 /\!/ D_2$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

ou $D_1 \not/\!/ D_2$ et $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$

$\dim(\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)) = 3 \iff D_1 \not/\!/ D_2$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

Pour savoir si deux droites se coupent il faut calculer $\dim(\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2))$

Or l'espace tangent à $\mathrm{Aff}(D_1 \cup D_2)$ est engendré par les trois vecteurs

$$M_1 - P_1,\ P_1 - P_2,\ M_2 - P_2 \quad \text{où } M_i, P_i \in D_i .$$

Il faut donc trouver 2 points de D_1 et D_2 respectivement.

3. Barycentre

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $\sum_1 \lambda_i = 1$ et $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{E}$

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes pour $G \in \mathcal{E}$

(i) $\sum_1 \lambda_i \overrightarrow{GP_i} = 0$

(ii) $\exists\, O,\ \sum_1 \lambda_i \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OG}$

(iii) $\forall M ;\ \sum_1 \lambda_i \overrightarrow{MP_i} = \overrightarrow{MG}$

G est le barycentre des P_i affectés des poids λ_i. On le note quelque fois

$$G = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i .$$ Si $\forall i,j\ \lambda_i = \lambda_j$, on parle d'isobarycentre

Propriétés

1) $\mathrm{Aff}(A)$ est l'ensemble des barycentres des points de A

2) $\mathcal{V}$ sous espace affine $\Leftrightarrow \forall P_i \in \mathcal{V}, \forall \lambda_i \in K$ avec $\sum_1 \lambda_i = 1$; $\sum_1 \lambda_i P_i \in \mathcal{V}$

3) [Associativité des barycentres]

Soit $M_i = \sum_j \mu_j P_j^i$; Alors

$$\sum_1 \lambda_i M_i = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j\, P_j^i$$

4) les coordonnées du barycentre sont les barycentres des coordonnées.

Application de 3) : les médianes d'un triangle se coupent dans l'isobarycentre des sommets : $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$