Maintenant $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension fini

## 1. Définitions et premières propriétés

Si $a,b\in\mathcal{E}$ le segment $[a,b]:=\{ta+(1-t)b \mid t\in[0,1]\}$

Comme $ta+(1-t)b = b+t(a-b)$ ; $[a,b]\subset(a,b)$

$C\subset\mathcal{E}$ espace affine est convexe si $\forall a,b\in C$, $[a,b]\subset C$.

prop
i) l'intersection de convexes est convexe

ii) $\mathcal{C}$ convexe $\Leftrightarrow$

$\sum_1^l \lambda_i=1$ ; $\lambda_i\geqslant 0$ $P_i\in\mathcal{E}$ alors $\sum_1^l\lambda_iP_i\in\mathcal{C}$

iii) Si $C$ est convexe, alors son adhérence $\bar{\mathcal{C}}$ est convexe.

Soit $A\subset\mathcal{E}$, alors l'enveloppe convexe de $A$ $\mathrm{Env}(A)$ est l'intersection de tous les convexes contenant $A$. C'est le plus petit convexe contenant $A$.

prop | $\mathrm{Env}(A)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de $A$.

exemple : triangle

La dimension d'un convexe $\mathcal{C}$ est la dimension de $\mathrm{Aff}(C)$

## 2. Un peu de géométrie des convexes.

Soit $f$ une forme linéaire sur $E$, alors

$H_f^+=\{M \mid f(M-O)\geqslant b\}$ est un demi-espace fermé

Son bord est $\partial H^+:=\{M\mid f(M-O)=b\}$. Alors $H^+$ est convexe.

Soit $\mathcal{C}$ un convexe.

prop Soit $C$ un convexe fermé. Soit $x\in\mathcal{E}\setminus C$. Il existe alors un hyperplan affine $H$ séparant $x$ de $\mathcal{C}$ : $\mathcal{C}\subset H_f^+$, et $x\in\mathcal{E}\setminus H_f^+$.

◀ On identifie $\mathcal{E}$ à $\mathbb{R}^n$ de telle sorte que $x$ est à l'origine. Soit alors

$\alpha=\mathrm{Inf}(\|u\|^2 \mid u\in\mathcal{C})$. Soit $u_n\in\mathcal{C}$, tel que $\|u_n\|^2\to\alpha$. Alors $u_n$ est une suite borné qui converge (après extraction de sous-suite) vers $u_0$. Pour tout $u \in \mathcal{C}$ et $t \in [0,1]$ on

on donc $\|tu + (1-t)u_0\|^2 \geq \|u_0\|^2$. Donc $t^2\|u-u_0\|^2 + t\langle u-u_0 | u_0\rangle \geq 0$ pour tout $t$.

Donc $\langle u-u_0|u_0\rangle \geq 0$. Comme $\langle 0-u_0|u_0\rangle < 0$, l'hyperplan affine

$H = \{u \mid \langle u-u_0|u_0\rangle = 0\}$ sépare $0$ de $\mathcal{C}$. ▶ une forme linéaire $f$ sur $E$

Un hyperplan d'appui est un hyperplan affine $H$ donné par

$H = \{ f(M-O) = b$, où $b = \sup\{ f(P-O) \}$ avec $P \in C\}$. le demi espace d'appui est alors $\{P \mid f(P-O) \leq b\}$ (loi $f$ linéaire $E \to \mathbb{R}$)

prop : tout convexe fermé est l'intersection de ces demi-espaces d'appui

◀ Soit $\mathcal{C}_0$ l'intersection des demi espaces d'appui de $\mathcal{C}$. Évidemment $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_0$. Soit $x \in \mathcal{C}_0 \setminus \mathcal{C}$ (si non vide). Alors il existe un hyperplan séparant $x$ de $\mathcal{C}$. Un hyperplan // sera alors un hyperplan d'appui séparant $x$ de $\mathcal{C}$. Contradiction. Donc $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ ▶

Un point $x$ de $\mathcal{C}$ est extrêmal si $\forall y, z \in C$ tq $x \in [y,z]$ alors $x = y$ ou $x = z$.

prop Soit $H$ un hyperplan d'appui, si $x$ est un point extremal de $H \cap \mathcal{C}$ alors $x$ est un point extremal de $\mathcal{C}$

◀ En effet, si $[a,b] \subset \mathcal{C}$ et $d \in ]a,b[ \cap H$ alors $[a,b] \subset H$ ▶

prop 1 : Tout convexe compact contient un point extremal

◀ par récurrence sur la dimension, ▶

## 3. Intérieur d'un convexe

Soit $C$ un convexe, alors l'intérieur de $C$ est l'intérieur topologique de $C$ dans $\mathrm{Aff}(C)$

Prop : Soit $C$ un convexe fermé.

1) $\mathrm{Int}(C)$ est non vide
2) si $x \in \mathrm{int}(C)$, $y \in C$ alors $\forall t \in ]0,1[$ $tx+(1-t)y \in \mathrm{int}(C)$. En particulier $\mathrm{int}(C)$ est convexe
3) Soit $x \in \mathrm{Int}(C)$ et $H$ un hyperplan passant par $C$ alors $x \in \mathrm{Int}(C \cap H)$.
4) Si $x \notin \mathrm{Int}(C)$, alors $x \in H =$ hyperplan d'appui

◀ 1) Soit $S$ l'ensemble des points extremaux de $C$.

On a $\dim(\mathrm{Aff}(C))$

Il existe donc $x_0, \dots, x_n \in C$ tel que

$$\mathrm{Aff}(S) = \mathrm{Aff}(x_0, \dots, x_n)$$

On considère le repère $(x_0, \vec{x_0x_1}, \vec{x_0x_2}, \dots, \vec{x_0x_n})$

l'isobarycentre $y$ de $(x_0, \dots, x_n)$ est de coordonnées $\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right)$

et tous les points de coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ et $\sum_1^t \lambda_i < 1$

sont dans $\mathrm{Env}(x_0, \dots, x_n) \subset C$. Donc $\mathrm{Int}(C) \neq \emptyset$.

2) Soit $a \in \mathrm{int}(C)$. Soit $t \in [0,1]$ et $b \in C$

Il existe un ensemble ouvert $U$ de vecteur tel que $a + U \subset C$

Alors si $u = tv \in tU$ alors $(at + (1-t)b) + u =$

$(a+v)t + (1-t)\, b \in C$. Ainsi $ta + (1-t)b \in \mathrm{Int}(C)$.

3) En effet si $U$ est un ouvert $U \cap H$ est un ouvert de $H$

4) Soit $x \notin \mathrm{int}(C)$. Soit $a \in \mathrm{Int}(C)$. Alors si $t>1$ $m_t = tx+(1-t)a \notin C$ (sinon par 2, $x \in \mathrm{int}(C)$). Soit $H_t$ un hyperplan separant $C$ de $m_t$. Soit $t_n \searrow 1$ ; On extrait une sous-suite de façon à ce que $H_{t_n}$ converge (comment ?). La limite $H_0$ est un hyperplan d'appui et $H_0 \cap C$ est une face de $C$.

## 4. Enveloppe convexe en dimension finie

<u>Thm</u> Soit $C$ un convexe compact dans un espace affine de dim $n$. Alors tout point de $C$ est le barycentre à coefficients positifs de $n+1$ points extrémaux

◀ On utilise une recurrence sur la dimension. C'est vrai pour $n=1$ :

Un convexe compact de dimension 1 est un segment $[a,b]$. Ces points extremaux sont $a$ et $b$. Le résultat suit.

Supposons la propriete vrai pour $n$, ~~et~~ soit $C$ un convexe dans un espace affine de dimension $n+1$. Soit $x \in C$.

(i) si $x$ est extremal c'est fini

(ii) sinon il existe $s$ extremal, $s \neq x$. On considère alors la droite $D = (s,x)$. Alors $D \cap C$ est convexe compact. Un convexe compact d'une droite est un segment fermé. Comme $s$ est extremal, $s$ est (par definition) l'une des extremités de ce segment. Soit $\alpha$ l'autre extremité de ce segment. Alors

- $x \in [s, \alpha]$, $x$ est barycentre à coeff $\geq 0$ de $s, \alpha$
- Il existe un hyperplan d'appui $H$ passant par $\alpha$.

$\alpha \in H \cap C = C_1$ qui est convexe et compact. Par récurrence, $\alpha$ est le barycentre à coefficients $\geq 0$ de $n+1$ points extrémaux $s_0, \dots, s_n$ de $C_1$

Le résultat suit de l'associativité des barycentres. ▶

Corollaire : tout convexe compact est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

## 5. Faces d'un convexe

Une face $F$ d'un convexe $C$ est un sous ensemble convexe tel que si $x, y \in C$, $t \in ]0,1[$ ; $tx + (1-t)y \in F$, alors $x, y \in F$

prop : 1) l'intersection de deux faces est une face

2) Si $F$ est une face de $C$, et $C$ face de $A$ alors $F$ est une face de $A$.

3) Une face de dimension $0$ est un point extremal.

Prop si $H$ hyperplan d'appui, alors $H \cap P$ est une face de $P$

prop 2 4) l'hyperplan engendré par une face de codimension $1$ est un hyperplan d'appui : $H_F$

5) $P$ est la seule face de $P$ de dimension maximale

6) Si $F$ est une face de $C$ alors $Aff(F) \cap C = F$

7) $C = \bigsqcup_{F \in \mathcal{F}} \operatorname{int}(F)$. Où $\mathcal{F}$ est l'ensemble des faces de $C$.

◀ Voir exercice ▶

(à faire)

pas nécessaire en petites dimensions

# Polyèdres convexes et polytopes

## 1. Définitions et premières propriétés

Un polyedre convexe est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés.

Un polytope est un polyèdre convexe compact

A partir de maintenant on suppose que $P = \bigcap_{i \in I} H_i^+$ où l'écriture est minimale. C'est à dire si $i \in I$

$$\bigcap_{j \in I \setminus \{i\}} H_j^+ \neq P$$

Théorème (structure des polyèdres convexes)

Soit $P = \bigcap_{i \in I} H_i^+$ une écriture minimale de $P$ alors

i) $H_i$ est un hyperplan d'appui,

ii) $F_i = H_i \cap P$ est une face de codimension 1.

iii) $P = \operatorname{Int}(P) \sqcup \left( \bigcup_{i \in I} F_i \right)$

Corollaire Un polyèdre n'a qu'un nombre fini de pts extremaux

⇒ Un polytope n'a qu'un nombre fini de faces.

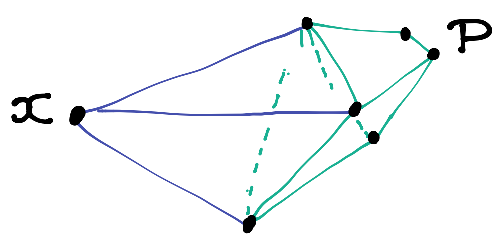
⇒ Un polytope est l'enveloppe d'un nombre fini de points : ses points extremaux.

◀ Par recurrence sur la dimension.

nombre fini de faces de codimension 1 ▶

◀ Soit $P_i = \bigcap_{j\in I\setminus\{i\}} H_i^+$ Par hypothèse, $P_i \neq P$.

Soit $x_i \in P_i \setminus P$, Alors $H_i$ sépare $P$ de $x$, puisque $x \notin H_i^+$.




On choisit $u \in \mathrm{Int}(P) \subset \mathrm{Int}(P_i)$

Alors $]x,u[ \subset \mathrm{Int}(P_i)$

Il existe $y \in ]u,x[$ tel que $y \in H_i$. D'après le resultat sur l'enterieur $\mathrm{Aff}(H_i \cap P_i) = H_i$.

Par ailleurs $H_i \cap P = H_i \cap P_i$. Donc

a) $H_i \cap P$ est non vide et $H_i$ hypoplan d'appui de $P$

b) En particulier $H_i \cap P$ est une face de $P$, elle est de codimension 1

car $\mathrm{Aff}(H_i \cap P) = \mathrm{Aff}(H_i \cap P_i) = P_i$

Soit enfin $x \in \partial P = P \setminus \mathrm{int}(P)$. Soit $a \in \mathrm{int}(P)$. Alors

$\forall t \geqslant 1$ (voir resultat sur l'enterieur) $m_t = tx + (1-t)a \notin P$

En particulier $\forall t > 1, \exists i$ tq $m_t \notin H_i^+$. Il existe $i_0$ et une suite

$t_n \to 1$, tel que $m_{t_n} \notin H_{i_0}^+$. En allant à la limite $x = m_1 \in H_{i_0} \cap P = F_{i_0}$

Enfin, comme $H_i$ est un hyperplan d'appui $H_i \cap \mathrm{int}(P) = \emptyset$

On a bien montrer $\partial P = \bigcup_{i \in I} F_i$ ▶

## 2. Structure des polygones (= polytope en dimension 2)

Un polygone se decompose en

$$\mathrm{int}(P) \sqcup \underset{\substack{\parallel \\ \text{les points extremaux}}}{S_i} \sqcup \mathrm{int}(F_j)$$

des $F_j$ sont les $\underset{\substack{\parallel \\ \text{(faces de dimension 1)}}}{\text{arêtes}}$, leurs extremités sont des points extremaux

Deux arêts sont d'intersection vide, ou se coupent en un point extrémal.

Def : (dimension 3) Une arête est l'intersection de deux faces de dimension 2

Prop : (i) les extrémités d'une arête sont des points extremaux

(ii) Une arête est l'intersection d'exactement deux faces

## 2. Polytopes en dimension 3 et la formule d'Euler

On considère à partir de maintenant des polytopes de dimension 3

La terminologie est la suivante.

face de dimension 0 = sommets
" " " 1 = arête
" " " 2 = face

Théorème (Euler)

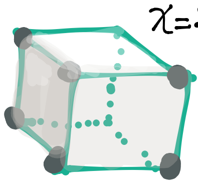
Soit P un polytope de dimension 3. Soit $f = \#$ faces, $s = \#$ sommets ; $a = \#$ arêtes. Alors

$$\chi = f - a + s = 2$$

Exemples et « contrexemples »

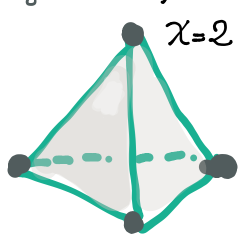
$f = 6$, $s = 8$, $a = 12$

$\chi = 2$



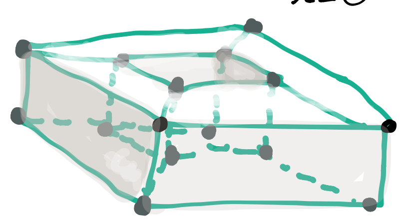
$f = 4$, $s = 4$, $a = 6$

$\chi = 2$



$f = 16$ ; $s = 16$, $a = 32$

$\chi = 0$



## Première preuve

Nous avons besoin d'un resultat preliminaire. Un graphe planaire (fini, borné) est un ensemble fini de segments bornés ne s'intersectant qu'à leurs extremités. Les extremités sont appelées sommets, les arcs arêtes, et les faces sont les composants connexes du complémentaire de l'union $\Gamma$ des segments. On supposera $\Gamma$ connexe ce qui suffit à assurer que chaque face a un bord connexe. Alors

$$\#\text{faces} - \#\text{arêtes} + \#\text{sommets} = 2.$$

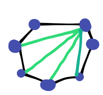
Notons $A = \{\text{arêtes}\}$, $F = \{\text{faces}\}$, $S = \{\text{sommets}\}$

Pour $s \in S$, $f \in F$ tel que $s \in \partial f$. On note $\theta(s,f)$ l'angle $\overset{s}{\sphericalangle}_{\theta}\, f$. On va calculer

$$\Theta = \sum{}' \theta(s,f) \text{ de deux manière differentes}$$

a) $\Theta = \sum_s{}' \left( \sum_{f \mid s \in \partial f}{}' \theta(s,f) \right) = \sum_s{}' 2\pi = 2\pi(\#\text{ sommets})$

b) si maintenant $f$ est une face bornée ayant $a_f$ côtés



$$\sum_{s \in \partial f}{}' \theta(s,f) = \pi(a_f - 2)$$

[On découpe en triangles]

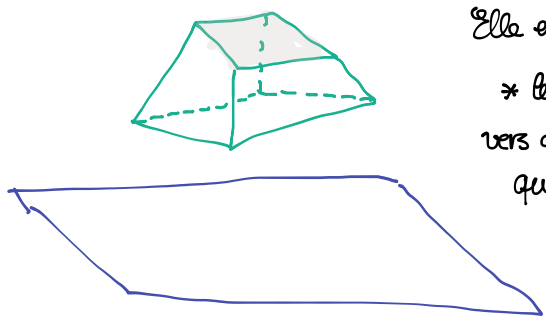
Pour la face $f_0$ infini on a (en considerons la face complementaire)

$$\sum_{s \in \partial f_0}{}' (2\pi - \theta(s,f_0)) = \pi(a_{f_0} - 2) \text{ et donc } \sum_{s \in \partial f_0}{}' \theta(s,f_0) = \pi(a_{f_0} + 2)$$

Ainsi $\sum_f{}' \left( \sum_{s \in \partial f}{}' \theta(s,f) \right) = \pi\left(\sum_f{}' a_f\right) - 2\pi(\# F - 2)$

Or $\sum_f{}' a_f = 2\#\text{arêtes}$. Ai $\#\text{sommets} - \#\text{arêtes} + \#\text{faces} = 2$ ▶

◀ Soit $P$ un polytope. Soit $F$ une face. Soit $H$ un plan // à cette face et tel que $P$ est compris entre $\mathrm{Aff}(F)$ et $H$. Si $y \in t(F)$ la projection radiale par rapport à $y$ est un homeo de $\partial P \setminus F$ sur $H$.



Elle envoie

* les arêts de $P$ (autres que celles de $F$) vers des segments de $H$ (ne s'intersectant) qu'aux extremités. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces segments.

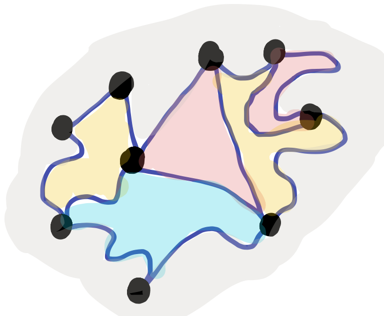
* les faces de $P$ (autre que $F$) sur des composantes connexes du complémentaires de l'union des segments

Si on considère maintenant le polyèdre $P' = P \cap H'$ où $H'$ est un demi espace (dont le bord est // à $H$) tel que $y \notin H'$.

Alors, on voit que, $P'$ a le même nombre de faces, arêts sommets que $P$. les arêts de $P'$ s'envoient sur les arêts d'un graphe $\Gamma$ fini borné connexe. les sommets et faces de $P$ sur les sommets et faces de $P'$. Le résultat suit alors. ▶

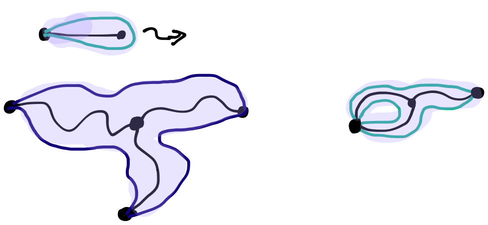
Deuxième methode :

◀ On projette sur la sphère radialement, puis de la sphère sur le plan stereographiquement $\Rightarrow$ les arêtes deviennent des arcs $C^1$, sans intersection



puis on utilise l'algorithme suivant :

1) on elimine les sommets



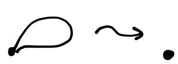
Alors $f \rightsquigarrow f+1$ (on ajoute une face)

$a \rightsquigarrow a$

$s \rightsquigarrow s-1$

le graphe reste connexe. et $f-a+s$ constant

2) dès qu'une "boucle" apparait, on l'efface



$f \rightsquigarrow f-1$

$a \rightsquigarrow a-1$

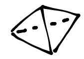
$s \rightsquigarrow s$

A chaque etape de l'algorithme, le graphe reste connexe et $f-a+s$ constant

$\Rightarrow$ à la fin, il n'y a plus qu'un seul sommet, plus d'arête et une seule face

$f-a+s=2$ ▶

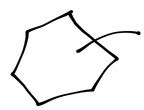
troisième méthode : récurrence sur le nombre de sommets

$s=4 \Rightarrow$ tetraèdre  $f=4, s=4, a=6$ $f+s-a=2$

On suppose la propriété connue pour un polygone à $n$ sommets.

Soit $P$ de Sommets $x_1, \ldots, x_{n+1}$ ; Soit $Q = \mathrm{Env}(x_1, \ldots, x_n)$

$x_{n+1} \in Q$ ; il existe alors une face $F \subset H$ qui sépare $x_{n+1}$ de $Q$




On a donc $Q = P \cap H^+$ ; soit $P' = P \cap H^-$

↝ on montre alors que a) tout sommet de $Q$ et $P'$ est sommet de $P$

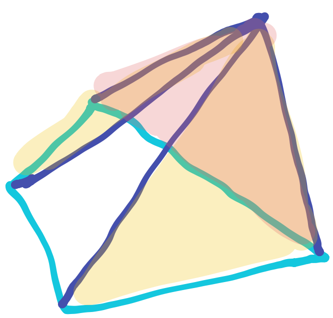
b) toute arête ....

c) toute face de $Q$ et $P'$ sauf $F$

Soit $p = \#$ arête de $F = \#$ sommet de $F$

$$f = f_Q + s_Q - a_Q + f_{P'} - s_{P'} - a_{P'} - 2 - p + p = f_{P'} - s_{P'} - a_{P'}$$

Maintenant $f_{P'} = p+1$ ; $s_{P'} = p+1$ ; $a_{P'} = p+p$



Donc $f_{P'} - a_{P'} + s_{P'} = 2$ ▶

## 3. Polytopes réguliers en dimension 3

Un polyèdre est topologiquement régulier si

i) toutes les faces ont le même nombre de sommets $N$

ii) Chaque sommet appartient exactement à $P$ faces

Théorème si $\mathcal{P}$ est un polytope regulier et $(N,P)$ comme au dessus

alors $(N,P,s,a,f) = (3,3,6,4,4)$ : cube

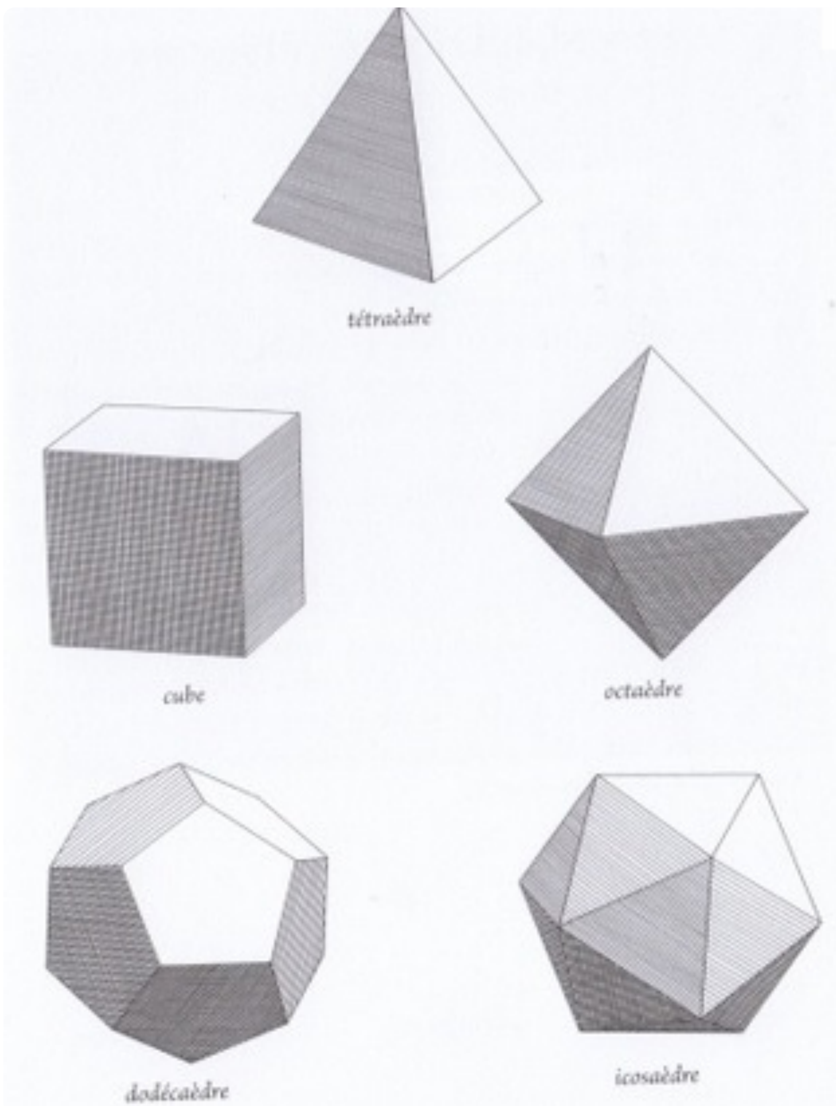
$= (3,4,12,6,8)$ : octaèdre

$= (4,3,12,8,6)$ : cube

$= (3,5,30,12,20)$ : icosaèdre

$= (5,3,30,20,12)$ : dodecaèdre.

Tous ces cas sont réalisés dans les 5 solides platoniciens



◀ En comptant les paires $(A,F)$ où $A$ arête $\subset F$ face

On a $2a = Nf$. De même $Nf = Ps$ en comptant les paires

$(S,F)$ où $S$ est un sommet de la face $F$

$$f - a + s = 2 \text{ devient } \frac{2a}{N} + \frac{2a}{P} = 2 + a$$

donc $\frac{2}{N} + \frac{2}{P} = \frac{2}{a} + 1 > 1$ $\qquad \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{2}{a} + 1$ ; $10 + 6 = \frac{30}{a} + 15$

Par ailleurs $N, P \geqslant 3$.

Pas de solution pour $N \geqslant 6$, $P \geqslant 3$. $\frac{2}{N} + \frac{2}{P} \leqslant \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = 1$

Les seules solutions pour $N = 3$ sont $P = 4, 5$

$N = 4 \Rightarrow P = 3$

$N = 5 \Rightarrow P = 3$

Avec les valeurs correspondantes pour $a, s$ et $f$ on obtient le tableau suivant

| N | P | a | s | f | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 6 | 4 | 4 | tetraèdre |
| 3 | 4 | 12 | 6 | 8 | octaèdre |
| 4 | 3 | 12 | 8 | 6 | cube |
| 3 | 5 | 30 | 12 | 20 | icosaèdre |
| 5 | 3 | 30 | 20 | 12 | dodécaèdre |

▶