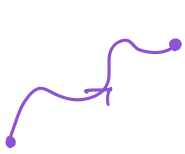
Homotopie et chemins

Soit M un espace topologique, $x, y \in M$

un chemin de x à y est une application γ continue $[0,1] \to M$

telle que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$

un lacet basé en x est un chemin de x à x



de lacet constant (ou trivial) basé en x est $\gamma : t \mapsto x$

I Homotopie à extremités fixées

Soit γ_0 et γ_1 deux chemins allant de x à y.

Une homotopie entre γ_0 et γ_1 à extremités fixées est une application continue

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M$$

telle que $\forall s \quad H(0,s) = x, \quad H(1,s) = y$

$$H(t,0) = \gamma_0(t) ; \quad H(t,1) = \gamma_1(t)$$

Si on note $\gamma_s : t \mapsto H(t,s)$, on peut voir l'homotopie H comme une famille continue de chemins (γ_s) joignant γ_0 à γ_1. Une homotopie est un "chemin de chemins"

Lorsque γ_0 et γ_1 sont deux lacets basés en x, on parle alors d'homotopie de lacet à extremité fixée.

On dit que γ_0 et γ_1 sont homotopes s'il existe une homotopie (à extremités fixées) entre γ_0 et γ_1

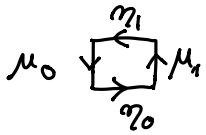
II La formule d'homotopie

Théorème : Soit ω une forme fermée sur M,

si γ_0 et γ_1 sont deux chemins homotopes (à extremités fixées)

alors $\displaystyle\int_{\gamma_0}\omega = \int_{\gamma_1}\omega$

◀ Soit $H : [0,1]\times[0,1] \to M$, on sait que $H^*\omega$ est fermée



Ainsi $\displaystyle\int_{\mu_0} H^*\omega + \int_{\mu_1} H^*\omega + \int_{\eta_0} H^*\omega + \int_{\eta_1} H^*\omega$

Or $\mu_1 : t \to [1,t]$; donc $H\circ\mu_1 = \gamma_1$ Ainsi $\displaystyle\int_{\mu_1} H^*\omega = \int_{\gamma_1}\omega$

de même en notant $\bar{\mu_0} : t \mapsto [0,t]$ on a $\displaystyle\int_{\mu_0} H^*\omega = -\int_{\bar{\mu_0}} H^*\omega = -\int_{H^*\circ\bar{\mu_0}}\omega = -\int_{\gamma_0}\omega$

Enfin $H\circ\eta_i$ et $H\circ\eta_0$ sont des chemins constants égaux à $\gamma_0(1)$ et $\gamma_0(0)$ respectivement.

Ainsi $\displaystyle\int_{\eta_i} H^*\omega = \int_{H\circ\eta_i}\omega = 0$. En conclusion $\displaystyle\int_{\gamma_0}\omega = \int_{\gamma_1}\omega$ ▶

II Composition de chemins.

On utilisera le lemme de topologie suivant

Soit X un espace topologiques telle que $X = F_1 \cup F_2$ où F_1, F_2 sont fermés

Soit $f : X \to Y$, telle que $f|_{F_1}$ est continue et $f|_{F_2}$ continue

alors f est continue

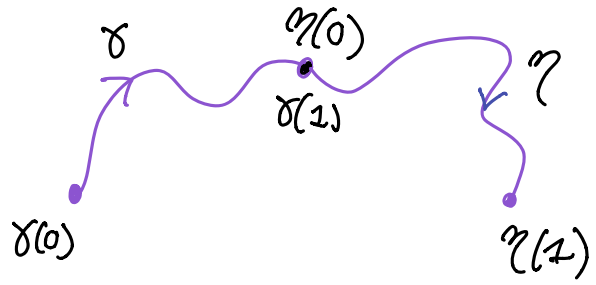
◀ Soit P un fermé de Y ; $\bar{f}'(P) = (\bar{f}'(P)\cap F_1)\cup(\bar{f}'(P)\cap P_2)$.

or $\bar{f}'(P)\cap F_1$ est un fermé de F_1, donc un fermé de X, de même $\bar{f}'(P)\cap F_2$.

Donc $\bar{f}'(P)$ est fermé. Ceci étant vrai pour tout P, f est continue ▶

Soit $\gamma : [0,1] \to M$ et $\eta\ [0,1] \to M$ des chemins tels que

$\gamma(1) = \eta(0)$



le composé de ces deux chemins est

$\gamma * \eta : [0,1] \longrightarrow M$ tels que

$$\begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} : \gamma * \eta(t) = \gamma(2t) \\ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 : \gamma * \eta(t) = \eta(2t-1) \end{cases}$$

L'inverse de γ est le chemin $\bar{\gamma} : t \longmapsto \gamma(1-t)$

Si $x \in M$; i_x denote le chemin constant $t \longmapsto x$

On va noter $\gamma \sim \eta$ si γ et η sont homotopes à extremités fixées

proposition

(i) $\gamma * \bar{\gamma} \sim i_{\gamma(0)}$

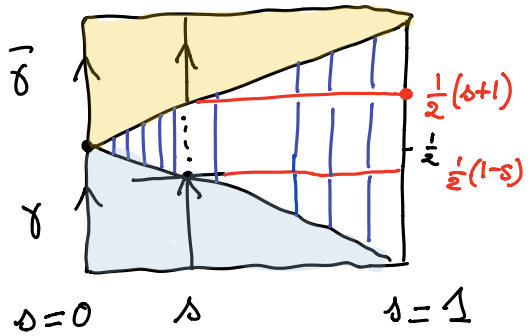
(ii) $\gamma * i_{\gamma(1)} \sim i_{\gamma(0)} * \gamma \sim \gamma$

(iii) $(\gamma * \eta) * \xi \sim \gamma * (\eta * \xi)$

(iv) $\gamma_0 \sim \gamma_1$ et $\eta_0 \sim \gamma_1 \Longrightarrow \gamma_0 * \eta_0 \sim \gamma_1 * \eta_1$

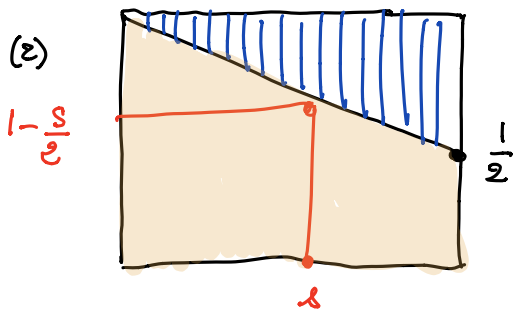
◀ Chacune de ces preuves est un peu pénible à vérifier. Il faut à chaque construire l'homotopie, mais l'idée est souvent simple

Preuve de (1). On considère la suite de chemins qui suit γ pendant un temps s, puis on revient



$$H(s,t) = \gamma(2t) \text{ si } t \leq \tfrac{1}{2}(1-s)$$
$$H(s,t) = \gamma(1-s) \text{ si } t \in \left[\tfrac{1}{2}(1-s), \tfrac{1}{2}(1+s)\right]$$
$$H(s,t) = \gamma(2(1-t)) \text{ si } t \geq \tfrac{1}{2}(1+s)$$

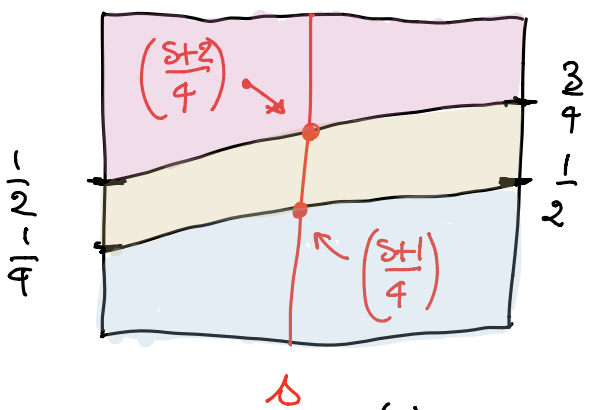
(2)



$$H(s,t) = \gamma\left(\frac{t}{1-\frac{s}{2}}\right) \text{ si } t \leq 1-\frac{s}{2}$$
$$H(s,t) = \gamma(1) \text{ si } t \geq 1-\frac{s}{2}$$

(3) Par construction

$$(\gamma * \eta) * \zeta = \begin{cases} \gamma(4t) \text{ si } t \leq \frac{1}{4} \\ \eta(4(t-\frac{1}{4})) \text{ si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \zeta(2t-1) \text{ si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \gamma * (\eta * \zeta) = \begin{cases} \gamma(2t) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \eta(4(t-\frac{1}{2})) \text{ si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \zeta(4(t-\frac{3}{4})) \text{ si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



$$H(s,t) = \begin{cases} \gamma\left(\frac{4}{s+1}t\right) \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4} \\ \eta\left(4(t-\frac{s+1}{4})\right) \text{ si } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4} \\ \zeta\left(\frac{4}{2-s}\left(t-\frac{s+2}{4}\right)\right) \text{ si } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

(4) $\gamma_0 \sim \gamma_1$ avec l'homotopie H ; $\eta_0 \sim \eta_1$ avec l'homotopie F

On considère l'homotopie G

$$G(s,t) = H(s,2t) \text{ si } 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2}$$
$$G(s,t) = F(s,2t-1) \text{ si } \tfrac{1}{2} \leq t \leq 1$$

▶

III le groupe fondamental

la proposition précédente décrit des propriétés ressemblant aux axiomes d'un groupe. Pour obtenir vraiment un groupe on doit remplacer la relation $\sim$ par le signe $=$. C'est facile à faire en utilisant la notion de relation d'équivalence :

proposition : être homotope est une relation d'équivalence. C'est-à-dire

(i) $\gamma \sim \gamma$ (ii) $\gamma \sim \eta$ et $\eta \sim \zeta \Rightarrow \gamma \sim \zeta$ (iii) $\gamma \sim \eta \Rightarrow \eta \sim \gamma$

◀ construisons à chaque fois l'homotopie

(i) $H(s,t) = \gamma(t)$, (ii) si H, F sont les homotopies entre γ, η et η, ζ resp respectivement $G(s,t) = H(2s,t)$ si $s \leq \frac{1}{2}$, $= F(2s-1,t)$ si $s \geq \frac{1}{2}$ (iii) si H est l'homotopie entre $\gamma \sim \eta$, $\bar{H}(s,t) = H(1-s,t)$ est l'homotopie entre η et γ ▶

On définit alors le groupe fondamental de M basé en x

$\pi_1(M,x) := \{\text{lacets basés en } x\}/\sim$; on note $[\gamma]$ la classe d'homotopie du lacet γ, c'est-à-dire $[\gamma] = \{\eta / \eta \sim \gamma\}$

On note aussi $C_x^y = \{\text{chemins de } x \text{ à } y\}/\sim$

Théorème (i) L'opération $[\gamma]\bullet[\eta] = [\gamma * \eta]$ est bien définie de $C_x^y \times C_y^z$ dans C_x^z. On a alors $[\gamma]\bullet[i_{\gamma(1)}] = [\gamma]$; $[\gamma]\bullet[\bar{\gamma}] = [i_{\gamma(0)}]$

$([\gamma]\bullet[\eta])\bullet[\zeta] = [\gamma]\bullet([\eta]\bullet[\zeta])$

Ainsi $(\pi_1(M,x), \bullet)$ est un groupe d'élément neutre $[i_x]$ et $[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}]$

(ii) Si η est un chemin de x à y

$$\widehat{[\eta]} : \begin{cases} \pi_1(M,x) \longrightarrow \pi_1(M,y) \\ [\gamma] \longrightarrow [\eta]\bullet[\gamma]\bullet[\bar{\eta}] \end{cases}$$

est bien définie et est un isomorphisme de roupe.

◀ (i) le produit est bien défini par (iv). ; Ensuite (i), (ii), (iii') démontre la structure de groupe

(ii) provient de (iv) par la définition. Ensuite

$[\hat{\eta}]([\gamma]\cdot[\mu]) = [\eta]\cdot[\gamma]\cdot[\mu]\cdot[\bar{\eta}] = [\eta]\cdot[\gamma]\cdot([\bar{\eta}]\cdot[\eta])\cdot[\mu]\cdot[\bar{\eta}]$

$= [\hat{\eta}]([\gamma])\cdot[\hat{\eta}](\mu)$. Ainsi $\widehat{[\eta]}$ est un morphisme de groupe

On vérifie ensuite que $\widehat{[\eta]}\circ\widehat{[\bar{\eta}]} = Id$, $\widehat{[\bar{\eta}]}\circ[\eta] = Id$ ▶

Remarque : si U est contractile alors $\pi_1(U) = 0$.

On exercice nous verrons que $\pi_1(S^1, x) \approx \mathbb{Z}$; $\pi_1(S^n, x) = \{e\}$ si $n > 1$

$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\})$ est le groupe libre à deux générateurs.

Soit X un espace topologique connexe par arc, on dira que X est simplement connexe si $\pi_1(X, x) = \{id\}$

IV Homotopies et homotopies libres

Théorème

Soit γ_0 et γ_1 deux lacets basés en x. Si γ_0 et γ_1 sont homotopes librement, alors $[\gamma_0]$ et $[\gamma_1]$ sont conjugués dans $\pi_1(X, x)$.

Plus précisément, si H est l'homotopie libre entre γ_0 et γ_1,

$t) = H(t, 0) = H(t, 1)$; alors $\gamma_0 = \eta\cdot\gamma_1\cdot\bar{\eta}^{-1}$

Réciproquement si $\circ$ γ_1 basés en x sont tels que $[\gamma_0]$ et $[\gamma_1]$ sont conjugués, alors γ_0 et γ_1 sont conjugués

(Voir exercice)

Corollaire, l'ensemble des classes d'homotopies libres s'identifie à l'ensemble des classes de conjugaisons de $\pi_1(X,x)$

V Applications et groupe fondamentaux.

Soit $f : X \to Y$; $f(x)=y$. On remarque que si $\gamma_0 \sim_x \gamma_1$ alors $f\circ\gamma_0 \sim f\circ\gamma_1$. On en déduit une application

$$f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y, f(y))$$
$$[\gamma] \mapsto [f\circ\gamma]$$

Théorème. L'application f_* est un morphisme de groupe.

On suppose maintenant que $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ vérifient $f(x)=g(x)=y$, et sont tels que f et g sont homotopes par $H : X\times[0,1] \to Y$

Théorème $f(\gamma) = \eta \cdot g(\gamma) \cdot \bar{\eta}^{-1}$ pour tout $\gamma \in \pi_1(X,x)$ où $\eta = H(x,t)$

Corollaire. Soit X tel que l'identité soit homotope à une application constante, alors X est simplement connexe.