Université Côte d'Azur
Laboratoire Dieudonné

Feuille 1

M1
Geo Diff
2018-2019

Exercice 1 – Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, de dimension finie, et muni d'une norme $||.||$. On rappelle que si $A \in \mathcal{L}(E)$ avec $||A|| < 1$, alors $I - A$ est inversible d'inverse $\Sigma_{k\geq 0} A^k$.

1. Expliquer pourquoi $GL(E)$, l'ensemble des applications linéaires inversibles de E dans E, est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.
2. On considère l'application $\mathcal{I} : GL(E) \to GL(E)$ définie par $L \mapsto L^{-1}$. Montrer que $\mathcal{I}$ est différentiable en tout point de $GL(E)$, et expliciter sa différentielle (commencer par regarder ce qui se passe en I).
3. L'application $\mathcal{I}$ est-elle C^1?

Exercice 2 – On considère les applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ suivantes :

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \ si \ (x,y) \neq (0,0) \ et \ f(0,0) = 0$$

$$g(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \ si \ (x,y) \neq (0,0) \ et \ g(0,0) = 0$$

Montrer que f et g sont continues en $(0,0)$ et admettent des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$. Sont-elles différentiables en $(0,0)$?

Exercice 3 – Soit $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application définie par :

$$h(x,y) = \frac{|x|^a|y|^a}{x^2+y^2} \ si \ (x,y) \neq (0,0) \ et \ h(0,0) = 0$$

Trouver pour quelles valeurs du paramètre réel a la fonction h admet des dérivées partielles, et pour quelles valeurs elle est différentiable en 0.

Exercice 4 – Sur l'espace $M(n,\mathbf{R})$ des matrices carrées de taille n, montrer que l'application $M \to M^2$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 5 – Sur l'espace $M(n,\mathbf{R})$ des matrices carrées de taille n, on considère l'application déterminant Det.

1. Quelle est la régularité de cette application?
2. Expliciter sa différentielle en tout point (on pourra commencer par calculer cette différentielle en I, puis en une matrice inversible).

Exercice 6 – Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ une application différentiable, qui est *propre*, c'est-à-dire telle que $||f(x)|| \to +\infty$ si $||x|| \to \infty$. On suppose que pour tout $x \in \mathbf{R}^2$, $D_x f$ est injective. On veut montrer qu'alors f est surjective.

1. Soit $a \in \mathbf{R}^2$ et $g(x) = ||f(x) - a||^2$. Montrer que g est différentiable et calculer $D_x g$.
2. Montrer que g atteint sa borne inférieur en un point $x_0 \in \mathbf{R}^2$, et que $D_{x_0} g = 0$. Conclure.

Exercice 7 – Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. On note $N : x \mapsto ||x||$.

1. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.
2. Si N est différentiable en $x \in E$, montrer qu'elle l'est aussi en λx pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$. Comparer $D_{\lambda x} N$ et $D_x N$.
3. Si N est différentiable en $x \in E$, montrer que $D_x N(x) = N(x)$. En déduire que la norme de $D_x N$ est 1.
4. Sur $\mathbf{R}^n$, on pose $||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$, où $x = (x_1, ..., x_n)$. En quels points l'application $x \mapsto ||x||_\infty$ est-elle différentiable?
5. Même question pour la norme $||x||_1 = \sum_{1\leq i\leq n} |x_i|$, où $x = (x_1, ..., x_n)$ et ensuite pour la norme euclidienne standard.

Exercice 8 – On suppose qu'il existe un difféomorphisme f entre l'ouvert U de $\mathbf{R}^m$ et l'ouvert U' de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $m = n$.

Exercice 9 – Montrer que les coordonnées polaires sont un difféomorphisme de classe C^1 entre les ouverts $]0, 2\pi[\times]0, \infty[$ et $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R}_+$.

Exercice 10 – Montrez que si ϕ d'un ouvert U de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^p$ est un difféomorphisme local, alors ϕ est une application *ouverte* (l'image d'un ouvert est ouvert). Montrez que si ϕ est injective alors ϕ est un difféomorphisme sur son image.

Exercice 11 – Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie. Soit U un ouvert de E, et V un ouvert de F, soit ϕ une application de classe C^k de V dans E. Montrez que Ψ: $U \times V$ dans $E \times F$, $\Psi(x, y) = (x + \phi(y), y)$ est un difféomorphisme.

Exercice 12 – Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy)$.
$a-$) Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbf{R}^2$ et calculer sa différentielle.
$b-$) Quels sont les points de $\mathbf{R}^2$ au voisinage desquels f est un difféomorphisme local ?

Exercice 13 – Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^1, k-lipschitzienne avec $k < 1$. On définit $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ par $\phi(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$.
$a-$) Montrer que ϕ est un C^1 difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbf{R}^2$.
$b-$) En déduire que ϕ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même.

Exercice 14 – Soit $A : \mathbf{R}^n \to M_n(\mathbf{R})$ une application de classe C^1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A(0)$ pour que $a : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ définie par $a(x) = A(x).x$ soit un C^1 difféomorphisme au voisinage de l'origine.