

# COURBES COMPLEXES

Pierre Pansu

21 septembre 2008

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Courbes complexes</b>	<b>2</b>
1.1	Courbes complexes	2
1.1.1	Courbes complexes	2
1.2	Courbes complexes simplement connexes	3
1.2.1	La droite projective complexe	3
1.2.2	Le disque, le demi plan supérieur et ses quotients	3
1.2.3	Le théorème d'uniformisation	4
1.3	Premières applications	4
1.3.1	Le théorème fondamental de l'algèbre	4
1.3.2	Le petit théorème de Picard	4
1.4	Courbes complexes planes	4
1.5	Courbes planes cubiques	5
1.5.1	Connexité	6
<b>2</b>	<b>Formes abéliennes</b>	<b>7</b>
2.1	Definition	7
2.1.1	Périodes	7
2.2	Homologie	7
2.2.1	Le théorème de Hurewicz	7
2.2.2	Le genre d'une courbe	7
2.2.3	La formule de Riemann-Hurwitz	7
2.2.4	Le genre d'une courbe plane	7
2.3	Le groupe fondamental d'une courbe plane	7
2.4	Retour sur les cubiques	7
2.5	1-formes différentielles	7
2.5.1	Rappels	7
2.5.2	Motivation	9
2.5.3	Courbes algébriques planes projectives	9
2.5.4	Revêtement ramifié	10
2.5.5	Calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré	11
2.5.6	Différentiabilité de $dx/y$	11
2.5.7	1-formes fermées et primitives	11
2.5.8	Application d'Abel-Jacobi	13
2.5.9	Un théorème d'Abel	13
2.5.10	Structure de groupe sur la cubique	14
<b>3</b>	<b>Espace tangent</b>	<b>16</b>
3.0.11	Espace tangent	16
3.0.12	Champs de vecteurs	17
3.0.13	Flots	17
3.0.14	Intersection de sous-variétés	18
3.1	Orientation	19

3.1.1	Rappel : orientation d'un espace vectoriel . . . . .	19
3.1.2	Orientation d'une variété . . . . .	19
3.1.3	Orientabilité . . . . .	20
3.2	Éléments de topologie différentielle . . . . .	21
3.2.1	Régularité . . . . .	21
3.2.2	Classification des variétés de dimension 1 . . . . .	22
3.3	Caractéristique d'Euler-Poincaré . . . . .	23
3.3.1	Décompositions cellulaires convexes . . . . .	23
3.3.2	Invariance de la caractéristique d'Euler-Poincaré . . . . .	25
3.4	Variétés compactes de dimension 2 . . . . .	25
3.4.1	Somme connexe . . . . .	25
3.4.2	Dépendance par rapport aux choix . . . . .	26
3.4.3	Exemples de variétés de dimension 2 . . . . .	27
3.4.4	Décompositions cellulaires lisses . . . . .	27
3.4.5	Exemples de décompositions cellulaires lisses . . . . .	28
3.4.6	Décompositions, revêtements et sommes connexes . . . . .	30
3.4.7	Classification des variétés compactes de dimension 2 . . . . .	30

# Chapitre 1

## Courbes complexes

### 1.1 Courbes complexes

#### 1.1.1 Courbes complexes

On peut définir la notion de carte, d'atlas et de variétés *analytique complexe* complexe en supposant que les cartes sont à valeurs dans des espaces vectoriels complexes, remplaçant dans les définitions le mot  $C^r$  par le mot holomorphe. La dimension d'une variété analytique complexe est alors la dimension complexe de l'image des cartes. Un difféomorphisme holomorphe est appelé un *biholomorphisme* et son inverse est aussi holomorphe.

Nous nous intéresserons tout particulièrement au cas suivant.

**Définition 1.1.1** *Une courbe complexe est une variété analytique complexe de dimension 1. Sa structure complexe est donnée par un atlas  $\{(U_i, X_i)\}$  où les  $X_i$  sont des coordonnées à valeurs dans  $\mathbb{C}$  telle que les changements de cartes sont holomorphes.*

On définit alors de la même manière la notion d'application holomorphe entre variétés analytiques complexes, de sous-variétés analytiques.

Le revêtement universel d'une courbe complexe – ou d'une variété analytique complexe – est également une courbe complexe – ou une variété analytique complexe.

On ne peut plus par contre parler de partition de l'unité dans le monde des fonctions holomorphes. Remarquons par contre que deux courbes complexes peuvent être difféomorphes sans être équivalentes dans le monde analytique complexe.

En particulier, nous ne savons pas démontrer l'analogie du théorème de Whitney et ceci pour une bonne raison :

**Proposition 1.1.2** *Toute fonction holomorphe définie sur une courbe analytique complexe compacte est constante. En particulier, il n'existe pas d'immersion holomorphe d'une courbe compacte dans  $\mathbb{C}^n$ .*

Par contre de nombreuses variétés analytiques complexes – et en particulier toutes les courbes sont biholomorphes à des sous-variétés d'un espace projectif.

Cette proposition est une conséquence immédiate – car toute fonction continue sur un compact admet un maximum – du lemme suivant :

**Lemme 1.1.3** *Principe du maximum. Soit  $X$  une courbe complexe, soit  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe non localement constante. Alors la fonction  $|f| : x \mapsto |f(x)|$  n'admet pas de maximum local.*

DÉMONSTRATION : C'est un énoncé local, donc on peut supposer que  $X$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

Supposons d'abord  $n = 1$ . Si  $f$  n'est pas constante au voisinage de 0,  $f$  possède un développement limité de la forme  $f(x) = a_k x^k + o(x^k)$  avec  $a_k \neq 0$ . Il existe alors une fonction holomorphe  $\phi$  définie au voisinage de 0 telle que  $\phi(0) = 0$  et  $\phi'(0) \neq 0$ , telle que  $f(x) = \phi(x)^k$  au voisinage de 0. Autrement dit, quitte à changer de coordonnée,  $f(x) = x^k$ . On constate que  $x \mapsto |x|^k$  n'admet pas un maximum local en 0.

Dans le cas général, on raisonne par l'absurde. Supposons que  $|f|$  admette un maximum local en 0. Alors la restriction de  $f$  à toute droite complexe passant par l'origine est constante, donc  $f$  est constante au voisinage de 0.  $\square$

## 1.2 Courbes complexes simplement connexes

### 1.2.1 La droite projective complexe

Le premier exemple de courbe complexe est la droite projective complexe. Un polynôme, ou une fraction rationnelle de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définit naturellement une application holomorphe de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

On remarque que par construction le groupe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  agit par biholomorphisme sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

### 1.2.2 Le disque, le demi plan supérieur et ses quotients

Le *demi-plan supérieur*, noté  $\mathbb{H}^2$ , est l'ouvert de  $\mathbb{C}$  défini par

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}.$$

On remarque tout d'abord que  $\mathbb{H}^2$  est biholomorphe au disque  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$

Nous avons alors

**Proposition 1.2.1** *Le groupe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  agit par homographie en préservant  $\mathbb{H}^2$ . De plus un élément  $A$  différent de l'identité de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  a un point fixe sur  $\mathbb{H}^2$  si et seulement si  $|\mathrm{trace}(A)| < 2$ . De plus  $A'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$ .*

De nombreux sous-groupes de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  vont agir proprement discontinuement sans point fixe sur  $\mathbb{H}^2$ . Nous allons nous contenter d'un exemple.

Soit

$$\Gamma_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} m & 2p \\ 2n & q \end{pmatrix} \mid m, n, p, q \in \mathbb{Z}, \det(A) = 1 \right\}.$$

**Proposition 1.2.2** *Le groupe  $\Gamma_2$  agit proprement discontinuement sans point fixe sur  $\mathbb{H}^2$ .*

DÉMONSTRATION : Nous nous contentons de montrer que  $\Gamma_2$  agit sans point fixes sur  $\mathbb{H}^2$ . En considérant la trace, nous sommes ramenés au cas suivants

- soit  $m = -q$ , mais alors  $\det(A) = -m^2 - 4pn = 1$  or  $-1$  n'est pas un carré modulo 4. Les carrés modulo 4 sont en effet  $1 = 1^2 = 3^2$  et  $0 = 2^2 = 0^2$ .
- soit  $m = -q + 1$ , mais alors  $\det(A) = -m^2 + m - 4pn = 1$ , or modulo 4, les valeurs de  $m^2 - m$  sont successivement 0, 0, 2, 2.

Nous voyons donc que  $\Gamma_2$  agit sans point fixes.  $\square$

Nous avons alors

**Proposition 1.2.3** *La courbe complexe  $\mathbb{H}^2/\Gamma_2$  est biholomorphe à  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ .*

On considère la fonction

$$f(z) = \sum_{A \in \Gamma_2} A'(z)$$

### 1.2.3 Le théorème d'uniformisation

Le théorème suivant – que nous ne démontrerons pas – est l'un des résultats fondamentaux des mathématiques

**Théorème 1** [UNIFORMISATION DE RIEMANN] *Toute courbe complexe simplement connexe est biholomorphe à la droite projective  $\mathbb{CP}^1$ , à  $\mathbb{C}$  tout entier ou au disque  $\mathbb{D}$ .*

Par exemple, le revêtement universel de  $\mathbb{CP}^1$  auquel on a oté deux points est biholomorphe à  $\mathbb{C}$  (pourquoi?); le revêtement universel de  $\mathbb{CP}^1$  auquel on a oté trois points est biholomorphe à  $\mathbb{D}$  (pourquoi?). Nous nous contenterons de remarquer

**Proposition 1.2.4** *Il n'existe pas de difféomorphisme holomorphe entre  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{D}$ . Autrement dit  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{D}$  ne sont pas holomorphiquement équivalents.*

DÉMONSTRATION : En effet, toute application holomorphe de  $\mathbb{C}$  dans  $U$  est bornée et en particulier constante.  $\square$

## 1.3 Premières applications

### 1.3.1 Le théorème fondamental de l'algèbre

**Théorème 2** [D'ALEMBERT] *Tout polynôme à coefficients complexes possède au moins une racine.*

DÉMONSTRATION : En effet un polynôme définit une application de  $\mathbb{CP}^1$  dans lui-même, le théorème suit donc de la proposition que nous allons énoncer  $\square$

**Proposition 1.3.1** *Toute application holomorphe d'une courbe complexe compacte dans  $\mathbb{CP}^1$  est constante ou surjective.*

DÉMONSTRATION : Supposons en effet que l'application  $f$  n'est pas surjective et évite un point. Envoyons ce point à l'infini, alors  $f$  donne naissance à une fonction holomorphe qui est donc constante – par application du principe du maximum.  $\square$

### 1.3.2 Le petit théorème de Picard

Ce théorème améliore le théorème de Liouville qui dit que toute fonction entière – c'est-à-dire holomorphe et définie sur  $\mathbb{C}$  – est constante.

**Théorème 3** *Toute fonction entière qui évite deux valeurs est constante.*

DÉMONSTRATION : En effet, comme  $\mathbb{C}$  est simplement connexe, toute telle fonction  $f$  se relève en une fonction  $g$  à valeur dans le revêtement universel de  $\mathbb{CP}^1$  moins trois points. Nous avons vu que ce revêtement est  $\mathbb{D} : p \rightarrow \mathbb{CP}^1 \setminus \{a, b, c\}$ . Comme  $p$  est un biholomorphisme local, nous en déduisons que  $g$  est holomorphe. Ainsi  $g$  est une fonction entière bornée, elle est donc constante.  $\square$

## 1.4 Courbes complexes planes

**Définition 1.4.1** *Une courbe complexe plane lisse est une sous-variété  $X$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  définie par*

$$X = \{[z : w : t] \mid P(z, w, t) = 0\},$$

où  $P$  est un polynôme homogène à trois variables tel que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial w}, \frac{\partial P}{\partial t}\right).$$

ne s'annule pas le long de  $X$ .

**Proposition 1.4.2** Une courbe complexe plane définie par  $P$  est une courbe complexe. Son espace tangent en  $[z : w : t]$  coïncide avec celui de l'espace tangent à la droite projective dont les coordonnées sont

$$\left[\frac{\partial P}{\partial z} : \frac{\partial P}{\partial w} : \frac{\partial P}{\partial t}\right].$$

On dit que cette droite projective est la droite projective tangente en  $[z : w : t]$ .

## 1.5 Courbes planes cubiques

Toute cubique peut s'écrire sous la forme

$$y^2z = x^3 + pxz^2 + qz^3,$$

c'est à dire dans la carte affine  $z = 1$ , nous avons

$$y^2 = x^3 + px + q.$$

EXERCICE : A quelles conditions la cubique

$$y^2z = x^3 + pxz^2 + qz^3,$$

est-elle lisse ?

Les dérivées partielles s'annulent si  $yz = 0$ ,  $3x^2 + pz^2 = 0$ ,  $y^2 = 2pxz + 3qz^2$ . Un bref calcul montre que la cubique n'est pas lisse si et seulement si  $27q^2 + 4p^3 = 0$ .

EXERCICE : Montrez que le nombre d'intersection d'une cubique avec une droite est au plus égal à trois avec égalité si la droite n'est pas tangente, que le nombre d'intersection d'une cubique avec une droite tangente est plus petit ou égal à deux, qu'il existe un seul point sur la cubique dont la droite tangente a un seul point avec la cubique.

On se place dans la carte affine  $z = 1$ . Traitons suivant les cas,

- La droite à l'infini  $z = 0$  intersecte la cubique en exactement un point  $[0 : 1 : 0]$  et qu'elle est tangente en ce point.
- Les droites  $x = az$ , intersecte la cubique en  $[0 : 1 : 0]$  et  $[a : \pm y_0 : 1]$  où  $y_0$  est solution de  $y^2 = a^3 + pa^2 + q$ . On a une racine double de cette équation si et seulement si la droite est tangente.
- Les droite d'équations  $y = ax + b$

**Corollaire 1.5.1** Une cubique plane lisse est connexe.

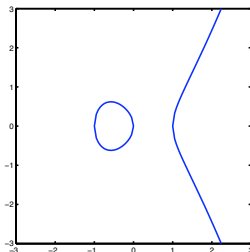
DÉMONSTRATION : On suppose en effet qu'une courbe plane a plusieurs composantes connexes. Une composante connexe  $B$  qui ne contient pas le point  $[0 : 1 : 0]$  n'intersecte pas la droite à l'infini. En particulier, elle est incluse dans l'ouvert de la carte affine  $z = 1$ . Or toute application holomorphe d'une variété analytique compacte – ici  $B$  – dans  $\mathbb{C}^2$  est constante. Nous obtenons ainsi que  $B$  est réduit à un point et la contradiction.

La connexité d'une courbe plane lisse est un fait général.

### 1.5.1 Connexité

EXERCICE : Tracer la courbe réelle d'équation  $y^2 = x(x - 1)(x + 1)$ .

**Solution.**



On constate qu'elle n'est pas connexe. En revanche, les solutions complexes de l'équation forment un ensemble connexe. C'est un fait général. Donnons d'abord une preuve sophistiquée, qui repose sur le lemme suivant.

**Proposition 1.5.2** *Une cubique lisse  $\mathcal{T}$  est connexe.*

DÉMONSTRATION : Par l'absurde. Supposons que  $\mathcal{T}$  n'est pas connexe. Comme  $\mathcal{T}$  est localement connexe, les composantes connexes de  $\mathcal{T}$  sont ouvertes. Le complémentaire d'une composante, réunion de composantes connexes, est ouvert. Donc les composantes connexes de  $\mathcal{T}$  sont des variétés complexes compactes de dimension 1. Soit  $Y$  une composante connexe de  $\mathcal{T}$  qui ne contient pas  $i$ . Alors la projection sur le premier facteur,  $(x, y) \mapsto x$  en coordonnées affines, est une fonction holomorphe sur  $Y$ , et  $|x|$  atteint son maximum sur  $Y$ , donc  $x$  est constante sur  $Y$ . Autrement dit,  $Y$  est contenue dans une droite verticale. Or l'intersection de  $\mathcal{T}$  avec toute droite verticale a au plus deux points, contradiction.  $\square$

Nous pouvons généraliser le théorème obtenu pour les quadriques

**Théorème 4** *L'ensemble des droites projectives tangentes à une courbe complexe est une courbe complexe de l'espace projectif dual.*



## Chapitre 2

# Formes abéliennes

### 2.1 Définition

#### 2.1.1 Périodes

### 2.2 Homologie

#### 2.2.1 Le théorème de Hurewicz

#### 2.2.2 Le genre d'une courbe

#### 2.2.3 La formule de Riemann-Hurwitz

#### 2.2.4 Le genre d'une courbe plane

### 2.3 Le groupe fondamental d'une courbe plane

**Théorème 5** *Une courbe plane simplement connexe est une quadrique.*

### 2.4 Retour sur les cubiques

### 2.5 1-formes différentielles

#### 2.5.1 Rappels

**Définition 2.5.1** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Une 1-forme différentielle sur  $U$  est une application qui à chaque  $x \in U$  associe une forme linéaire  $\omega(x)$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Si la matrice de  $\omega(x)$  est  $(a_1(x) \cdots a_n(x))$ , on note  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ . Si les fonctions  $a_i$ , au lieu d'être à valeurs réelles, sont à valeurs complexes, on parle de 1-forme différentielle complexe sur  $U$ .*

EXEMPLE : Si  $u$  est une fonction différentiable sur  $U$ , sa différentielle  $du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i$  est une 1-forme différentielle sur  $U$  (réelle ou complexe suivant que  $u$  est à valeurs réelles ou complexes).

**Définition 2.5.2** *Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^q$ . Soit  $f : V \rightarrow U$  une application différentiable,  $f =$*

$(f_1, \dots, f_n)$ . Alors  $f$  tire en arrière les formes différentielles de  $U$  vers  $V$ ,

$$f^*\omega(y) = \omega(f(y)) \circ d_y f = \sum_{i=1}^n a_i \circ f df_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q a_i \circ f \frac{\partial f_i}{\partial y_j} dy_j.$$

**Proposition 2.5.3** *Si  $u$  est une fonction sur  $U$ , on note  $f^*u = u \circ f$ . Alors*

1.  $d(f^*u) = f^*du$ ,
2.  $f^*u\omega = f^*u f^*\omega$ .

Cela rend le calcul de  $f^*\omega$  entièrement mécanique.

EXEMPLE : Soit  $\omega = x dy - y dx$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  le changement de coordonnées polaires,  $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Alors  $f^*\omega = r^2 d\theta$ .

En effet,  $f^*x = r \cos \theta$ ,  $f^*dx = d(f^*x) = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$ ,  $f^*y = r \sin \theta$ ,  $f^*dy = d(f^*y) = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$ , d'où

$$\begin{aligned} f^*\omega &= r \cos \theta (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) - r \sin \theta (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \\ &= r^2 d\theta. \end{aligned}$$

Dans  $\mathbb{C}^n$ , il y a des notations commodes.

**Notation.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ . On note  $z_j$  les coordonnées complexes sur  $U$ ,  $x_j = \Re(z_j)$  et  $y_j = \Im(z_j)$ . On note  $dz_j = dx_j + idy_j$  et  $d\bar{z}_j = dx_j - idy_j$ . Toute 1-forme différentielle à valeurs complexes s'écrit donc uniquement  $\sum_{j=1}^n a_j dz_j + a_{\bar{j}} d\bar{z}_j$ .

**Définition 2.5.4** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ . Une 1-forme différentielle complexe sur  $U$  est dite holomorphe si elle s'écrit  $\sum_{j=1}^n a_j dz_j$ , où les fonctions  $a_j$  sont holomorphes.*

EXEMPLE : Si  $f$  est une fonction holomorphe sur  $U$ , alors  $df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j$  est une 1-forme holomorphe.

REMARQUES : Si  $f : \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , est une application holomorphe, et  $\omega$  une 1-forme holomorphe, alors

$$f^*\omega = \sum_{i=1}^n a_i \circ f df_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q a_i \circ f \frac{\partial f_i}{\partial z_j} dz_j$$

est une 1-forme holomorphe.

**Définition 2.5.5** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On dit qu'une 1-forme différentielle  $\omega$  sur  $U$  est exacte s'il existe une fonction  $u$  sur  $X$  telle que  $f = du$ . Une condition nécessaire est que  $\omega$  soit fermée, i.e. que  $d\omega = 0$ , où, si  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ ,*

$$d\omega = \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i.$$

Ces deux notions sont préservées lorsqu'on tire les formes en arrière.

**Définition 2.5.6** 1. *Soit  $\omega = a(t) dt$  une 1-forme différentielle sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . L'intégrale de  $\omega$  sur  $[a, b]$  est*

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b a(t) dt.$$

2. Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  une courbe différentiable. L'intégrale de  $\omega$  sur  $\gamma$  est par définition

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \gamma^* \omega.$$

**Définition 2.5.7** Comme on sait transporter les 1-formes différentielles par les difféomorphismes, on peut parler de 1-formes différentielles sur les variétés, de formes exactes, fermées, d'intégrales curvilignes. Dans le cas des variété complexes, on peut même parler de 1-formes holomorphes.

### 2.5.2 Motivation

Comment calculer une primitive de la fonction  $\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$  ? Il s'agit d'intégrer la 1-forme différentielle  $dx/y$  le long d'arcs de la courbe d'équation  $y^2 = ax^2 + bx + c$ . Cette courbe  $C$  est une conique affine non dégénérée. On utilise un paramétrage unicursal de cette conique. C'est une application  $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow C$  dont les composantes sont des fonctions rationnelles, donc  $f^* \frac{dx}{y} = R(t) dt$  où  $R$  est une fraction rationnelle. Par conséquent, la primitive se calcule (décomposition en éléments simples). Le résultat s'exprime rationnellement en fonction de  $t$  et de  $\log(t)$  si les pôles de  $R$  sont réels (sinon il faut ajouter  $\arctan(t)$ ), donc c'est une expression rationnelle en  $x$  et en  $\log$  d'une fraction rationnelle en  $x$  et en  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ .

EXEMPLE : Intégration de  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Dans ce cas,  $C$  est le cercle unité. Le paramétrage unicursal d'origine  $A = (-1, 0)$  est  $f : t \mapsto (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$ . Inversement, comme  $t$  est la pente de la droite passant par  $A$  et  $(x, y)$ ,  $t = \frac{y}{x+1}$ . Alors

$$f^* \frac{dx}{y} = \frac{\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2}{1+t^2} dt = d(2 \arctan(t)) = d(2 \arctan(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1})).$$

REMARQUES : La méthode s'étend à toute fonction rationnelle en  $x$  et en  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ .

Comment intégrer  $\frac{1}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}}$  ?

La courbe  $T$  d'équation  $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$  n'est pas une conique. On va voir qu'elle ne possède pas de paramétrage rationnel par la droite projective. Si c'était le cas, l'ensemble des solutions complexes de l'équation (une courbe algébrique complexe) serait paramétrable par la droite projective complexe. Or on va voir que  $T$  est difféomorphe à un tore.

### 2.5.3 Courbes algébriques planes projectives

Comme pour les coniques, les courbes algébriques affines sont les points à distance finie de courbes algébriques projectives.

**Définition 2.5.8** Une courbe algébrique plane projective est  $T = \mathbb{P}(Z)$  où  $Z$  est le lieu des zéros d'un polynôme homogène en 3 variables.

La complétion projective d'une courbe algébrique affine s'obtient en rendant homogène l'équation. Pour la courbe affine  $T$  d'équation affine  $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , l'équation homogène est  $ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 - y^2z = 0$ . Les points à l'infini de  $T$  sont les points de coordonnées homogènes  $[x : y : 0]$  tels que  $ax^3 = 0$ , il y a donc un seul point,  $i = [0 : 1 : 0]$ , le point de fuite de l'axe des  $y$ .

EXERCICE : Si le polynôme  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  n'a que des racines simples, la cubique projective  $\mathcal{T}$  d'équation  $ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 - y^2z = 0$  est une sous-variété complexe de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

**Solution.** Dans la carte affine  $\phi_3$ , il s'agit d'étudier l'équation affine, dont la différentielle est  $(3ax^2 + 2bx + c)dx - 2y dy$ . Celle-ci s'annule aux zéros communs du polynôme  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  et de sa dérivée, i.e. aux racines multiples de ce polynôme.

Pour étudier l'unique point à l'infini  $i = [0 : 1 : 0]$  de  $\mathcal{T}$ , on utilise la carte affine  $\phi_2$ . Dans cette carte, l'équation affine de  $\phi_2(\mathcal{T})$  devient  $ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 - z = 0$ , dont la différentielle est  $(3ax^2 + 2bxz + cz^2)dx + (bx^2 + 2cxz + 3dz^2 - 1)dz$ . Au point  $\phi_2([0 : 1 : 0]) = (0, 0)$ , la différentielle est  $-dz$ , elle est non nulle. On conclut que  $\mathcal{T}$  est une sous-variété complexe.  $\square$

**Convention.** On suppose désormais que le polynôme  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  n'a que des racines simples.

On peut bâtir une preuve plus élémentaire en remarquant que  $\mathcal{T}$  coupe toute droite verticale, et que les points d'intersection varient continûment. Si les points d'intersection restaient distincts, cela consisterait à dire que la projection  $(x, y) \mapsto x$  est un revêtement. Ce n'est pas tout à fait vrai, ce qui complique la preuve. Néanmoins, le fait que cette application est presque un revêtement va être utile dans le paragraphe suivant.

### 2.5.4 Revêtement ramifié

On va calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $\mathcal{T}$ . Si  $\mathcal{T}$  était un revêtement de degré  $d$  de la droite projective, on pourrait utiliser la formule  $\chi(\mathcal{T}) = d\chi(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ . Un tel revêtement n'existe pas. A la place, on utilise la projection de centre  $i = [0 : 1 : 0]$ , de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  sur la droite projective  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 0$ , dont on note  $\infty$  le point de fuite. En coordonnées homogènes, elle s'écrit  $[x : y : z] \mapsto [x : 0 : z]$  (sa restriction au plan affine est simplement la projection sur l'axe des  $x$ ,  $(x, y) \mapsto x$ ). Cette application est un revêtement sauf en quelques points, dits *de ramification*, qui nécessiteront un traitement spécial.

EXERCICE : La restriction à  $\mathcal{T} \setminus \{i\}$  de la projection de centre  $i$  sur  $\mathcal{D}$  se prolonge en une application holomorphe  $p : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{D}$ . C'est une submersion au-dessus de  $\mathcal{D}$  privée de ses 3 points d'intersection  $r, r', r''$  avec  $\mathcal{T}$  et du point de fuite. La restriction de  $p$  à  $\mathcal{T} \setminus \{r, r', r'', i\}$  est un revêtement à 2 feuillets.

**Solution.** Au voisinage de  $i$ , on peut paramétrer  $\mathcal{T}$  par  $x \mapsto [x : 1 : \zeta(x)]$ , où  $\zeta$  est holomorphe au voisinage de 0,  $\zeta(0) = 0$ , d'où  $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n = x\eta(x)$  où  $\eta$  est holomorphe au voisinage de 0. On utilise la carte  $\phi_2 : [x : y : z] \mapsto (x/y, z/y)$ . Au voisinage de  $\infty$  dans  $\mathcal{D}$ , on utilise la carte  $\psi_2 : [x : z] \mapsto z/x$ . Dans ces cartes, la projection centrale s'écrit  $(x, z) \mapsto [x : 1 : z] \mapsto [x : 0 : z] \mapsto z/x$ , donc la restriction de cette projection à la courbe, dans le paramétrage choisi, s'écrit  $x \mapsto \zeta(x)/x = \eta(x)$ , qui est holomorphe. De l'équation  $\zeta = ax^3 + bx^2\zeta + cx\zeta^2 + d\zeta^3$ , on tire  $x\eta = ax^3 + bx^3\eta + cx^3\eta^2 + dx^3\eta^3$ , puis  $\eta = x^2(a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3)$ , qui montre que  $\eta'(0) = 0$ , i.e.  $p$  n'est pas une submersion en  $i$ .

Si  $q = (x, y) \in T$  est à distance finie,  $p$  n'est pas une submersion en  $q$  lorsque la tangente à  $T$  en  $q$  est verticale, i.e. quand la différentielle de l'équation affine de  $T$  est proportionnelle à  $dx$ . Cela se produit lorsque  $y = 0$ , i.e. aux trois points  $r, r'$  et  $r''$  de  $T$  dont les abscisses sont les racines du polynôme  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Soit  $q = (x, y) \in T$  un point où  $p$  est une submersion. Alors il existe des voisinages  $U$  de  $q$  dans  $T$  et  $V$  de  $x = p(q)$  dans  $\mathcal{D}$  tels que  $p|_U : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme, d'application réciproque  $s$ . Alors  $p^{-1}(V) = s(V) \cup \sigma \circ s(V)$ , où  $\sigma(x, y) = (x, -y)$ . Ceci montre que  $p$  est un revêtement en dehors des quatre points  $r, r', r''$  et  $\infty$ .  $\square$

**Lemme 2.5.9** *Il existe des voisinages disjoints  $V_1, \dots, V_4$  des quatre points  $r, r', r''$  et  $\infty$  de  $\mathcal{D}$  et des cartes  $\phi_i : p^{-1}(V_i) \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\psi_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}$  telles que pour tout  $q \in p^{-1}(V_i)$ ,  $\psi_i \circ p(q) = \phi_i(q)^2$ . Autrement dit, à changement de coordonnées holomorphe près,  $p$  se confond avec l'application*

$z \mapsto z^2$  au voisinage des points de ramification.

DÉMONSTRATION : Au voisinage du point  $i$ , on utilise le paramétrage  $x \mapsto (x, x\eta(x))$ . On peut écrire  $p = \eta(x) = \phi(x)^2$  où  $\phi = \sqrt{a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3}$  est holomorphe au voisinage de 0,  $\phi(0) = 0$  et  $\phi'(0) \neq 0$ , donc  $\phi$  est une carte.

Au voisinage de  $(r, 0)$ , on peut paramétrer  $T$  par  $y \mapsto (r + \xi(y), y)$ , où  $\xi$  est holomorphe au voisinage de 0 et satisfait  $\xi(0) = 0$ . De l'équation  $y^2 = a(r + \xi)^3 + b(r + \xi)^2 + c(r + \xi) + d$ , on tire  $y^2 = a(3r^2\xi + 3r\xi^2 + \xi^3) + b(2r\xi + \xi^2) + c\xi$ , soit  $(3ar^2 + 2br + c)\xi = y^2 - 3ar\xi^2 - a\xi^3 - b\xi^2$ . Cela montre que  $\xi'(0) = 0$ , donc on peut écrire  $\xi(y) = y^2\chi(y)$ , où  $\chi$  est holomorphe au voisinage de 0. Alors  $\chi(y) = \frac{1}{3ar^2 + 2br + c}(1 - (3ar + b)y^2\chi(y)^2 - ay^4\chi(y)^3)$ , donc  $p(x, y) = x = \xi(y)$  peut s'écrire  $\phi(y)^2$  où  $\phi$  est holomorphe au voisinage de 0,  $\phi(0) = 0$  et  $\phi'(0) \neq 0$ . Il en est de même au voisinage de  $r'$  et  $r''$ .  $\square$

### 2.5.5 Calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré

Soit  $C$  une décomposition cellulaire lisse de  $\mathcal{D}$  telle que

- les points  $r, r', r''$  et  $\infty$  sont des sommets de  $C$  ;
- toutes les faces de  $C$  contenant l'un de ces points sont contenues dans la réunion des ouverts  $V_i$ .

Chaque élément (sommets, arête, face) de  $C$  qui ne contient pas les points de ramification se relève en 2 éléments analogues, disjoints, dans  $\mathcal{T}$ . En contemplant le comportement de l'application  $z \mapsto z^2$ , on voit que chaque arête ou face contenant un point de ramification se relève en 2 éléments qui se touchent en un sommet. Les points de ramification eux-mêmes se relèvent en un seul sommet. On obtient une décomposition cellulaire lisse  $\hat{C}$  de  $\mathcal{T}$ , telle que

$$\hat{S} = 2S - 4, \quad \hat{A} = 2A, \quad \hat{F} = 2F,$$

donc  $\chi(\mathcal{T}) = 2\chi(\mathcal{D}) - 4 = 4 - 4 = 0$ , ce qui prouve que  $\mathcal{T}$  est un tore.

On a illustré sur un exemple un fait général. On dit qu'une application  $f : X \rightarrow Y$  entre variétés réelles de dimension 2 est un *revêtement ramifié* si, pour tout point  $x \in X$ , il existe des cartes  $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$  au voisinage de  $x$  et  $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}$  au voisinage de  $f(x)$  et un entier  $k(x)$  tels que  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = z^{k(x)}$ . Bien sûr,  $k = 1$  sauf pour un ensemble discret de points de  $X$  appelés *points de ramification*. L'entier  $k(x)$  est la *multiplicité de  $x$* . Si  $X$  et  $Y$  sont compactes, le *degré  $d$*  de  $f$ , nombre de points d'une fibre non ramifiée, est constant. La *formule de Riemann-Hurwitz* donne  $\chi(X) = d\chi(Y) - \sum_{x \in X} k(x) - 1$ .

### 2.5.6 Différentiabilité de $dx/y$

EXERCICE : Vérifier que la 1-forme différentielle  $\frac{dx}{y}$  se prolonge en une 1-forme différentielle holomorphe sur  $\mathcal{T}$ .

**Solution.** Au voisinage de  $r$ , on utilise le paramétrage  $f : y \mapsto [r + \xi(y) : y : 1]$ , où  $\xi(y) = y^2\chi(y)$ . Alors  $f^*\frac{dx}{y} = \frac{\xi'(y)}{y} dy = (2\chi + y\chi'(y)) dy$  est holomorphe au voisinage de 0, ce qui prouve que  $\frac{dx}{y}$  est holomorphe au voisinage de  $r$ . C'est pareil en  $r'$  ou  $r''$ .

Au voisinage de  $i$ , on utilise le paramétrage  $g : x \mapsto [x : 1 : \zeta(x)]$ , où  $\zeta(x) = x\eta(x)$ . Alors  $g^*\frac{dx}{y} = dx$  est holomorphe au voisinage de 0, ce qui prouve que  $\frac{dx}{y}$  est holomorphe au voisinage de  $i$ .  $\square$

### 2.5.7 1-formes fermées et primitives

Que signifie calculer une primitive d'une 1-forme différentielle comme  $dx/y$  sur un tore ?

REMARQUES : Il n'existe pas de fonction  $f$  sur  $\mathcal{T}$  telle que  $df = dx/y$ .

En effet, comme  $df$  est holomorphe,  $f$  est une fonction holomorphe. Comme  $\mathcal{T}$  est compacte,  $|f|$  atteint son maximum. D'après le principe du maximum (lemme 1.1.3),  $f$  est constante,  $df = 0$ , contradiction.  $\square$

Pourtant,  $dx/y$  admet des primitives localement. Par exemple, au voisinage de  $i$ , la carte  $g^{-1}$ , réciproque du paramétrage  $g : x \mapsto [x : 1 : \zeta(x)]$ , satisfait  $d(g^{-1}) = \frac{dx}{y}$ . L'obstacle pour étendre une primitive locale en une primitive globale est lié au groupe fondamental.

**Proposition 2.5.10** *Soit  $X$  une variété connexe. Soit  $\omega$  une 1-forme différentielle fermée sur  $X$ , réelle ou complexe. Il existe un plus petit revêtement connexe  $p : X^\omega \rightarrow X$  tel que  $p^*\omega$  soit exacte. Ce revêtement est galoisien. Son groupe d'automorphismes est commutatif et libre. Si  $X$  est compacte, il est isomorphe à  $\mathbb{Z}^N$ , pour un  $N \in \mathbb{N}$ .*

DÉMONSTRATION : Soit  $x_0 \in X$  un point base. On considère l'ensemble des chemins différentiables d'origine  $x_0$ . On note  $f(\gamma) = \int_\gamma \omega := \int_0^1 \gamma^* \omega$ . On introduit la relation d'équivalence qui identifie deux chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$  s'ils ont même extrémité et si de plus  $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$ . Comme lors de la construction du revêtement universel, on vérifie que l'espace quotient  $X^\omega$  est une variété, et que la projection  $p : X^\omega \rightarrow X$  qui à une classe de chemins associe leur extrémité commune est un revêtement. La fonction  $f$  passe au quotient en une fonction différentiable sur  $X^\omega$ , et, par construction,  $df = p^*\omega$ . Le point essentiel est que deux lacets différentiables de mêmes extrémités et homotopes sont équivalents.

Soit  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  une homotopie de  $\gamma$  à  $\gamma'$ . Comme  $\omega$  est fermée, elle admet des primitives locales. Recouvrons  $F([0, 1] \times [0, 1])$  par un nombre fini d'ouverts connexes  $U_i$  telle que  $\alpha|_{U_i} = df_i$ . Soit  $\delta > 0$  un nombre de Lebesgue du recouvrement  $F^{-1}(U_i)$  (i.e. tout sous-carré de côté  $\delta$  est entièrement contenu dans l'un des  $F^{-1}(U_i)$ ). Découpons  $[0, 1] \times [0, 1]$  en  $N^2$  sous-carrés égaux, de côté  $\leq \delta/2$ . Soit  $\alpha$  un chemin dans cette grille, passant successivement par les intersections  $z_0, \dots, z_k$ . Pour chaque  $j = 1, \dots, k$ , choisissons un indice  $i_j$  tel que les carrés contenant le côté  $[z_{k-1}, z_k]$  soient contenus dans  $F^{-1}(U_{i_j})$ . Baptisons "intégrale" de  $\omega$  sur  $\alpha$  la

somme  $\sum_{j=1}^k f_{i_j}(z_k) - f_{i_j}(z_{k-1})$ . Clairement, l'"intégrale" de  $\omega$  sur tout carré de la grille vaut zéro,

donc, en additionnant, l'"intégrale" de  $\omega$  sur le bord de  $[0, 1] \times [0, 1]$  vaut 0. Or c'est la différence entre les intégrales ordinaires de  $\omega$  sur  $\gamma$  et  $\gamma'$ . Celles-ci sont donc égales.

Comme toute classe d'homotopie contient un lacet lisse, on obtient une application  $h^\omega : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . C'est un homomorphisme de groupes. Soit  $H$  son noyau. Alors  $X^\omega = H \backslash \tilde{X}$  où  $\tilde{X}$  est le revêtement universel de  $X$ . Comme  $H$  est un noyau, il est distingué, et le quotient  $\pi_1(X, x_0)/H$  est isomorphe à l'image de  $h^\omega$ , un sous-groupe de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . En particulier, le revêtement est galoisien, et son groupe d'automorphismes est isomorphe à un sous-groupe de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , il est donc commutatif et libre. Si  $X$  est compacte,  $\pi_1(X, x_0)$  est engendré par un nombre fini d'éléments. Un groupe commutatif libre de type fini, c'est  $\mathbb{Z}^N$ .  $\square$

EXEMPLE : Dans le cas où  $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  et  $\omega = \frac{dz}{z}$ ,  $X^\omega = \tilde{X}$  coïncide avec le revêtement universel, donné par l'exponentielle  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

En effet,  $X$  se rétracte par déformation sur le cercle unité,  $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$  est engendré par le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique, le long duquel l'intégrale de  $dz/z$  est non nulle, donc l'homomorphisme  $h^{dz/z} : \pi_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$  est injectif. La primitive de  $\exp^* \frac{dz}{z} = dw$  est la coordonnée  $w$  sur  $\mathbb{C}$ .

### 2.5.8 Application d'Abel-Jacobi

On montre que la forme  $\frac{dx}{y}$  possède des primitives, qu'il faut voir comme des applications à valeurs dans un quotient de  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 2.5.11** *Soit  $X = \mathcal{T}$  et  $\omega = \frac{dx}{y}$ . Soit  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux générateurs de  $\pi_1(\mathcal{T})$ . Alors les nombres complexes  $\tau = \int_{\gamma} \omega$  et  $\tau' = \int_{\gamma'} \omega$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ . En particulier,  $X^\omega = \tilde{X}$  coïncide avec le revêtement universel.*

DÉMONSTRATION : Par l'absurde. Supposons que  $\tau' = \lambda\tau$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Considérons la 1-forme réelle fermée  $a = \Im m(\tau^{-1}\omega)$ . Alors  $\int_{\gamma} a = \int_{\gamma'} a = 0$ , donc le revêtement  $\mathcal{T}^a$  est trivial. Autrement dit,  $a = dg$  est exacte sur  $\mathcal{T}$ . Soit  $x \in \mathcal{T}$  un point où  $g$  atteint son maximum  $M$ . Soit  $f$  la primitive locale de  $\tau^{-1}\omega$  qui vaut  $M$  en  $x$ . Alors  $e^g = |e^{-if}|$  au voisinage de  $x$ . Le principe du maximum entraîne que la fonction holomorphe  $e^{-if}$  est constante au voisinage de  $x$ , contradiction. On conclut que  $\tau$  et  $\tau'$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ . L'homomorphisme  $h^\omega$  est injectif, donc  $\mathcal{T}^\omega = \tilde{\mathcal{T}}$ .  $\square$

**Corollaire 2.5.12** *Soit  $\Lambda$  le sous-groupe de  $\mathbb{C}$  formé des intégrales de  $\frac{dx}{y}$  sur les lacets de  $\mathcal{T}$ .*

*Alors, en intégrant  $\frac{dx}{y}$ , on obtient un isomorphisme de la variété complexe  $\mathcal{T}$  avec le tore quotient  $\Lambda \backslash \mathbb{C}$ .*

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 2.5.11, l'homomorphisme  $h^{dx/y}$  a pour image un sous-groupe  $\Lambda$  de  $\mathbb{C}$  engendré par deux vecteurs linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ . Ce groupe agit librement et proprement sur  $\mathbb{C}$ . Le quotient  $\Lambda \backslash \mathbb{C}$  est naturellement un tore. La 1-forme constante  $dz$  sur  $\mathbb{C}$  passe au quotient en une 1-forme holomorphe  $dz$  sur  $\Lambda \backslash \mathbb{C}$ . Notons  $\tilde{f} : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{C}$  une primitive de  $dx/y$ . Alors  $\tilde{f}$  passe au quotient en une application  $f : \mathcal{T} \rightarrow \Lambda \backslash \mathbb{C}$  qui satisfait  $f^*dz = dx/y$ . Comme  $dx/y$  ne s'annule nulle part,  $f$  est un difféomorphisme local entre variétés compactes, donc un revêtement holomorphe. Par construction de  $\Lambda$ ,  $f_{\#} : \pi_1(\mathcal{T}) \rightarrow \pi_1(\Lambda \backslash \mathbb{C}) = \Lambda$  coïncide avec l'isomorphisme  $h^{dx/y}$ . Les revêtements étant en bijection avec les sous-groupes du groupe fondamental,  $f$  est trivial, i.e. un difféomorphisme biholomorphe. Cela prouve que  $\mathcal{T}$  n'est pas seulement homéomorphe à un tore, mais biholomorphe au quotient de  $\mathbb{C}$  par deux translations indépendantes.  $\square$

### 2.5.9 Un théorème d'Abel

Les primitives  $f$  de  $dx/y$  ne sont pas des fonctions élémentaires, comme les fonctions rationnelles, le logarithme, l'exponentielle, les fonctions trigonométriques, leurs réciproques, ou les combinaisons de celles-ci. Autrement dit, on ne sait pas les calculer. Néanmoins, on sait prouver qu'elles satisfont à des identités, dont voici la plus simple.

**Théorème 6** N. Abel (1826). *Etant donnée une droite projective  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , notons  $p_1(\mathcal{L})$ ,  $p_2(\mathcal{L})$  et  $p_3(\mathcal{L})$  les trois points d'intersection de  $\mathcal{L}$  et de  $\mathcal{T}$  (certains sont éventuellement confondus). Soit  $f : \mathcal{T} \rightarrow \Lambda \backslash \mathbb{C}$  une primitive de  $dx/y$ . Alors*

$$f(p_1(\mathcal{L})) + f(p_2(\mathcal{L})) + f(p_3(\mathcal{L})) \in \Lambda \backslash \mathbb{C}$$

*est indépendant de  $\mathcal{L}$ .*

DÉMONSTRATION : Soit  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$  l'espace des droites de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . C'est une variété complexe de dimen-

sion 2. Alors l'application  $g : \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^* \rightarrow \Lambda \setminus \mathbb{C}$ ,  $\mathcal{L} \mapsto f(p_1(\mathcal{L})) + f(p_2(\mathcal{L})) + f(p_3(\mathcal{L}))$  est holomorphe. En effet, lorsque  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{T}$  sont transverses, le théorème des fonctions implicites affirme que chacun des points  $p_j(\mathcal{L})$  dépend holomorphiquement de  $\mathcal{L}$ . Soit  $\mathcal{L}$  une droite tangente à  $\mathcal{T}$  en un point distinct de  $i$ . Lorsqu'une sécante converge vers la tangente, 2 des points d'intersection convergent vers le point de tangence. En effet, par compacité, étant donné une suite de sécantes, on peut toujours extraire des sous-suites pour lesquelles les points d'intersection convergent. Les limites sont nécessairement des points d'intersection de la tangente et de la courbe, donc le point de tangence. Comme pour toutes les suites extraites, la limite est la même, il y a convergence. Pour la même raison, pour la tangente en  $i$ , les points d'intersection des sécantes voisines convergent vers  $i$ . Cela montre que l'application  $g$  est continue. Localement,  $g$  est une fonction continue, holomorphe le long d'une courbe, elle est automatiquement holomorphe partout.

Comme  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$  est simplement connexe,  $g$  possède un relèvement  $\tilde{g} : \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^* \rightarrow \mathbb{C}$ . C'est une fonction holomorphe. D'après le principe du maximum (pour les fonctions holomorphes sur des ouverts de  $\mathbb{C}^2$ ),  $\tilde{g}$  est constante, donc  $g$  est constante.  $\square$

### 2.5.10 Structure de groupe sur la cubique

Soit  $f : \mathcal{T} \rightarrow \Lambda \setminus \mathbb{C}$  la primitive de  $\frac{dx}{y}$  qui envoie le point  $i$  de  $\mathcal{T}$  sur  $0 \in \Lambda \setminus \mathbb{C}$ . Comme  $f$  est un difféomorphisme, on peut transporter par  $f$  la structure de groupe commutatif de  $\Lambda \setminus \mathbb{C}$ . Cette addition est donnée par une construction géométrique.

**Corollaire 2.5.13** *Soit  $q, q'$  des points de  $\mathcal{T}$ . La droite  $qq'$  (la tangente à  $\mathcal{T}$ , si  $q = q'$ ) recoupe  $\mathcal{T}$  en un point  $r$ . Soit  $r'$  l'image de  $r$  par la symétrie  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ . Alors l'application  $(q, q') \mapsto q \oplus q' = r'$  est une structure de groupe commutatif sur  $\mathcal{T}$ , et  $f : (\mathcal{T}, \oplus) \rightarrow (\Lambda \setminus \mathbb{C}, +)$  est un isomorphisme de groupes.*

DÉMONSTRATION : Soit  $L_i$  la droite à l'infini de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Alors  $L_i$  coupe  $\mathcal{T}$  en un seul point,  $i$ . Par conséquent,

$$f(p_1(\mathcal{L})_i) + f(p_2(\mathcal{L})_i) + f(p_3(\mathcal{L})_i) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

D'après le théorème d'Abel, pour toute droite  $\mathcal{L} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$ ,  $f(p_1(\mathcal{L})) + f(p_2(\mathcal{L})) + f(p_3(\mathcal{L})) = 0$ .

Soit  $q \in \mathcal{T}$  un point à distance finie. La droite projective  $L_q$  passant par les points  $i$  et  $q$  recoupe  $\mathcal{T}$  au point symétrique  $\sigma(q)$ . Par conséquent

$$f(q) + f(i) + f(\sigma(q)) = f(p_1(\mathcal{L}_q)) + f(p_2(\mathcal{L}_q)) + f(p_3(\mathcal{L}_q)) = 0,$$

donc  $f(\sigma(q)) = -f(q)$ .

Soit  $q, q'$  et  $r$  trois points de  $\mathcal{T}$  qui sont alignés. Alors  $f(q) + f(q') + f(r) = 0$ . Par conséquent  $f(q \oplus q') = f(r') = -f(r) = f(q) + f(q')$ . Ceci montre que la loi  $\oplus$  est une structure de groupe isomorphe à  $\Lambda \setminus \mathbb{C}$ .  $\square$

REMARQUES : Cette structure de groupe sur une cubique est suffisamment simple à calculer pour qu'on ait proposé de remplacer, dans la méthode RSA de cryptage à clé publique, le groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$  par une cubique sur un corps fini.



# Bibliographie

- [B1] M. BERGER, *Géométrie. Vol. 1. Actions de groupes, espaces affines et projectifs*. CEDIC, Paris ; Nathan Information, Paris, (1977).
- [B4] M. BERGER, *Géométrie. Vol. 4. Formes quadratiques, coniques et quadriques*. CEDIC, Paris ; Nathan Information, Paris, (1977).
- [BG] M. BERGER, B. GOSTIAUX, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Deuxième édition. Collection Mathématiques. Presses Universitaires de France, Paris, (1992).
- [Go] C. GODBILLON, *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, Paris, (1971).
- [Gr] A. GRAMAIN, *Topologie des surfaces*. Collection Le mathématicien. Presses Universitaires de France, Paris, (1971).
- [M] J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*. The University Press of Virginia, (1965).

# Chapitre 3

## Espace tangent

### 3.0.11 Espace tangent

L'espace tangent est l'endroit où vivent les vecteurs vitesse des courbes. Cela suggère la définition suivante.

**Définition 3.0.14** Soit  $X$  une variété et  $x \in X$ . Décidons que deux courbes  $\gamma$  et  $\eta$  telles que  $\gamma(0) = \eta(0) = x$  ont même vitesse en  $t = 0$  si, dans une carte  $\phi$  définie au voisinage de  $x$ , les images  $\phi \circ \gamma$  et  $\phi \circ \eta$  ont même vitesse en  $t = 0$ . L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle l'espace tangent de  $X$  en  $x$ , noté  $T_x X$ .

Clairement, la carte  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  identifie  $T_x X$  à l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ . Une autre carte  $\psi : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  donne une identification qui diffère de la première par l'isomorphisme  $d_{\phi(x)}(\psi \circ \phi^{-1})$ . Par conséquent,  $T_x X$  possède une structure d'espace vectoriel.

**Définition 3.0.15** Une application différentiable  $f : X \rightarrow Y$  entre variétés induit une application linéaire  $d_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  appelée sa différentielle. En particulier, pour une sous-variété  $Y \subset X$ ,  $T_y Y$  s'identifie à un sous-espace vectoriel de  $T_y X$ .

Une application  $f$  est une immersion (resp. submersion) en  $x$  si et seulement si sa différentielle est injective (resp. surjective). Deux sous-variétés sont tangentes en  $x$  si et seulement si elles ont même espace tangent en  $x$ .

EXEMPLE : Soit  $V$  un espace vectoriel. Soit  $f \in GL(V)$ . La différentielle de  $f$  en  $p$  se calcule comme suit. On identifie  $T_p \mathbb{P}(V)$  à  $Hom(p, V/p)$  et  $T_{f(p)} \mathbb{P}(V)$  à  $Hom(f(p), V/f(p))$ . Alors  $d_p f$  est l'isomorphisme de  $Hom(p, V/p)$  sur  $Hom(f(p), V/f(p))$  induit par  $f$ .

En utilisant une carte affine, on vérifie que tout vecteur tangent  $w$  à  $\mathbb{P}(V)$  en  $p$  est la vitesse en 0 d'une droite  $t \mapsto \gamma(t) = \mathbb{P}(u + tv)$ ,  $u$  vecteur directeur de  $p$ . Montrons qu'une autre droite  $t \mapsto \mathbb{P}(u' + tv')$  définit le même vecteur tangent  $w$  si et seulement si il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tel que  $u' = \lambda u, v' = \lambda v + \mu u$ . Choisissons une base de  $V$  telle que  $p = [0 : \dots : 0 : 1]$ , avec  $u = (0, \dots, 0, 1)$ ,  $u' = (0, \dots, 0, \lambda)$ . Alors

$$\phi_{n+1}(\mathbb{P}(u + tv)) = \left( \frac{tv_1}{1 + tv_{n+1}}, \dots, \frac{tv_n}{1 + tv_{n+1}} \right), \quad \phi_{n+1}(\mathbb{P}(u' + tv')) = \left( \frac{tv'_1}{\lambda + tv'_{n+1}}, \dots, \frac{tv'_n}{\lambda + tv'_{n+1}} \right),$$

dont les dérivées en  $t = 0$  valent respectivement  $(v_1, \dots, v_n)$  et  $(v'_1, \dots, v'_n)/\lambda$ . Les deux droites ont même vitesse si et seulement si  $v' - \lambda v$  est un multiple de  $u$ .

Par conséquent, l'homomorphisme  $p \rightarrow V/p$  qui envoie  $u$  sur  $v \bmod p$  ne dépend que du vecteur tangent  $w$  et non du choix de vecteur directeur  $u$ . Alors  $f \circ \gamma(t) = f(u) + tf(v)$ , donc le vecteur tangent  $d_p f(w)$  correspond à l'homomorphisme  $f(p) \rightarrow V/f(p)$  qui envoie  $f(u)$  sur  $f(v)$ .

### 3.0.12 Champs de vecteurs

**Définition 3.0.16** *Un champ de vecteurs sur une variété  $X$ , c'est une application qui à chaque point  $x$  associe un vecteur tangent  $\xi(x) \in T_x X$ , de sorte que, dans une carte  $\phi$ , l'application  $x \mapsto d_x \phi(\xi(x))$  soit différentiable.*

Remarquer que lorsque  $X$  est de classe  $C^r$ , on peut parler de champs de vecteurs de classe  $C^{r-1}$ , mais pas mieux.

REMARQUES : Lorsque  $X \subset \mathbb{R}^n$  est une sous-variété, un champ de vecteurs est aussi une application différentiable  $\xi : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Il revient au même de dire que cette application est de classe  $C^{r-1}$ .

REMARQUES : Si  $f : X \rightarrow Y$  est un difféomorphisme, et  $\xi$  un champ de vecteurs sur  $X$ , le champ de vecteurs transporté par  $f$  sur  $Y$  est noté  $f_* \xi$ . On a  $(f_* \xi)(y) = (d_{f^{-1}(y)} f)(\xi(f^{-1}(y)))$ .

EXEMPLE : Soit  $V$  un espace vectoriel, soit  $L \in \text{End}(V)$ . Alors  $L$  détermine un champ de vecteurs sur  $\mathbb{P}(V)$ .

En effet, l'homomorphisme  $L|_p : p \rightarrow V/p$  définit un vecteur tangent en  $p$ , vitesse de la droite  $\mathbb{P}(u + tL(u))$ ,  $u \in p$ .

### 3.0.13 Flots

**Définition 3.0.17** *Soit  $\xi$  un champ de vecteurs sur une variété  $X$ . Une ligne intégrale de  $\xi$  est la donnée d'un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  et d'une courbe différentiable  $\gamma : I \rightarrow X$  solution de l'équation différentielle  $\gamma'(t) = \xi(\gamma(t))$ ,  $t \in I$ .*

**Théorème 7** *Soit  $X$  une variété de classe  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , soit  $\xi$  un champ de vecteurs de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq r - 1$ .*

1. Existence locale. *Pour tout point  $x \in X$ , il existe  $\epsilon > 0$  et une ligne intégrale de  $\xi$  définie sur  $] -\epsilon, \epsilon[$  et passant par  $x$  en  $t = 0$ .*
2. Unicité locale. *Si  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow X$  et  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow X$  sont deux lignes intégrales de  $\xi$  de même condition initiale  $x$ , alors  $\gamma_1|_{I_1 \cap I_2} = \gamma_2|_{I_1 \cap I_2}$ .*
3. Solution maximale. *Pour tout point  $x \in X$ , il existe une unique solution maximale  $\gamma_x : I_x \rightarrow X$  de condition initiale  $x$ . Si  $K$  est un compact de  $X$  et si, pour tout  $t \in I_x$ ,  $t \geq 0$ ,  $\gamma_x(t) \in K$ , alors  $\sup I_x = +\infty$ .*
4. Dépendance par rapport à la condition initiale. *Soit*

$$W = \bigcup_{x \in X} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times X.$$

*Alors  $W$  est un ouvert, et l'application  $\Phi : W \rightarrow X$  définie par  $\Phi(t, x) = \gamma_x(t)$  est de classe  $C^k$ .*

5. Flot. *Pour  $t \in \mathbb{R}$ , soit  $W_t = \{x \in X \mid (t, x) \in W\}$ . Alors, pour  $t \geq 0$ , l'application  $\phi_t : W_t \rightarrow W_{-t}$  est un  $C^k$ -difféomorphisme, et, lorsque tout est défini,  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ .*

**Corollaire 3.0.18** *Si  $\xi$  est à support compact,  $W = \mathbb{R} \times X$ , et l'application  $t \mapsto \phi_t$  est un homomorphisme de groupes de  $\mathbb{R}$  dans  $\text{Diff}(X)$ .*

**Définition 3.0.19** *On appelle  $t \mapsto \phi_t$  le groupe à un paramètre engendré par  $\xi$ , ou plus brièvement le flot de  $\xi$ .*

REMARQUES : Soit  $f : X \rightarrow Y$  est un difféomorphisme, et  $\xi$  un champ de vecteurs sur  $X$ ,  $t \mapsto \phi_t$  le flot de  $\xi$ . Alors le flot de  $f_*\xi$  est  $t \mapsto f \circ \phi_t \circ f^{-1}$ .

EXEMPLE : Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie, soit  $L \in \text{End}(V)$ , soit  $\xi$  le champ de vecteurs correspondant. Alors le flot  $\phi_t$  de  $\xi$  est formé des bijections projectives associées aux bijections linéaires  $e^{tL}$ .

En effet, si  $p \in \mathbb{P}(V)$  et  $u$  est un vecteur directeur de  $p$ , la courbe  $s \mapsto e^{sL}(p)$  est tangente en  $s = t$  à la droite  $s \mapsto e^{tL}u + (s - t)L e^{tL}u$  dont la vitesse en  $s = t$  est  $L|_{e^{tL}p} : e^{tL}p \rightarrow V/e^{tL}p$ , c'est une ligne intégrale du champ  $\xi$ .

EXERCICE : Soit  $X$  une variété séparée et connexe. On note  $\text{Diff}_c(X)$  le groupe des difféomorphismes de  $X$  qui valent l'identité hors d'un compact. Montrer que  $\text{Diff}_c(X)$  agit transitivement sur  $X$ , i.e. pour tous  $x, x' \in X$ , il existe un difféomorphisme à support compact  $\phi$  tel que  $\phi(x) = x'$ .

**Solution.** Soit  $x \in X$ . Soit  $\phi_x : U_x \rightarrow V_x$  une carte au voisinage de  $x$ . Soit  $\chi$  une fonction à support compact sur  $V_x$  qui vaut 1 sur un voisinage  $W_x$  de  $0 = \phi(x)$ .

Soit  $z \in W_x$ . Construisons un difféomorphisme à support dans  $V_x$  qui envoie 0 sur  $z$ . Soit  $\zeta$  le champ de vecteurs constant sur  $\mathbb{R}^n$  qui vaut  $z$ . Soit  $\eta$  le champ de vecteurs à support compact sur  $\mathbb{R}^n$  défini par  $\eta = \chi\zeta$ . Le segment de droite  $t \mapsto tz$ ,  $t \in [-1, 1]$ , est une ligne intégrale de  $\eta$  de condition initiale 0. Par conséquent, le flot  $t \mapsto \psi_t$  de  $\eta$  satisfait  $\psi_1(0) = z$ .

Comme  $\psi_1$  est à support dans  $V_x$ , le difféomorphisme  $\phi^{-1} \circ \psi_1 \circ \phi$  de  $U_x$ , à support compact dans  $U_x$ , se prolonge en un difféomorphisme  $f$  de  $X$  tel que  $f(x) = \phi^{-1}(z)$ . Cela montre que l'orbite de  $x$  sous  $\text{Diff}_c(X)$  contient un voisinage de  $x$ . En fait, on en déduit que les orbites du groupe  $\text{Diff}_c(X)$  sont ouvertes. Comme  $X$  est connexe, elle ne peut être partitionnée en ouverts. On conclut qu'il n'y a qu'une orbite.  $\square$

### 3.0.14 Intersection de sous-variétés

Soit  $Y$  et  $Y'$  deux sous-variétés de  $X$ . A quelle condition  $Y \cap Y'$  est elle une sous-variété? Si  $f : X \rightarrow Z$  et  $f' : X \rightarrow Z'$  sont des submersions et  $Y = f^{-1}(z)$ ,  $Y' = f'^{-1}(z')$ , il suffit que  $(f, f') : X \rightarrow Z \times Z'$  soit une submersion.

**Lemme 3.0.20** Soit  $F$  et  $F'$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Alors l'application naturelle  $E \rightarrow E/F \times E/F'$  est surjective si et seulement si  $E = F + F'$ .

DÉMONSTRATION : Le noyau de l'application naturelle  $L : E \rightarrow E/F \times E/F'$  est  $F \cap F'$ . Comme

$$\dim(F \cap F') + \dim(F + F') = \dim(F) + \dim(F') \quad \text{et} \quad \dim(\ker L) + \dim(\text{im} L) = \dim(E),$$

$$\begin{aligned} \text{codim}(\text{im} L) &= \dim(E/F \times E/F') - \dim(\text{im} L) \\ &= \dim(E/F) + \dim(E/F') - \dim(E) + \dim(F \cap F') \\ &= \dim(E) - \dim(F) - \dim(F') + \dim(F) + \dim(F') - \dim(F + F') \\ &= \text{codim}(F + F'), \end{aligned}$$

donc  $L$  est surjective si et seulement si  $E = F + F'$ .

Autre argument. Remarquons que le dual de  $E/F$  s'identifie au sous-espace de  $E^*$  polaire  $F^0$  de  $F$ , i.e. constitué des formes linéaires qui s'annulent sur  $F$ . Alors  $(E/F)^* \times (E/F')^* = F^0 \times F'^0$ . L'adjoint de  $L$  s'écrit  $L^* : F^0 \times F'^0 \rightarrow E^*$ ,  $(f, f') \mapsto f + f'$ . Son noyau est l'ensemble des couples  $(f, f')$  tels que  $f' = -f \in F^0 \cap F'^0$ . Il s'identifie à  $(F + F')^0$ . Par conséquent,  $L^*$  est injective si et seulement si  $E = F + F'$ .  $\square$

**Définition 3.0.21** *On dit que deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $F'$  d'un espace vectoriel  $E$  sont transverses si  $E = F + F'$ . On dit que deux sous-variétés  $Y$  et  $Y'$  de  $X$  sont transverses si leurs espaces tangents sont transverses en tout point de l'intersection  $Y \cap Y'$ .*

EXEMPLE : Deux plans de  $\mathbb{R}^3$  sont transverses dès qu'ils sont distincts. Une droite  $D$  et un plan  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  sont transverses si et seulement si  $D$  n'est pas contenue dans  $P$ . Deux droites vectorielles de  $\mathbb{R}^3$ , en tant que sous-espaces vectoriels, ne sont jamais transverses. Deux droites affines de  $\mathbb{R}^3$ , en tant que sous-variétés, elles sont transverses si et seulement si elles sont disjointes.

REMARQUES : L'ensemble des couples  $(f, f')$  d'applications linéaires dont les images sont transverses est un ouvert de  $\text{Hom}(F, E) \times \text{Hom}(F', E)$ . Cet ouvert est non vide si et seulement si  $\dim(F) + \dim(F') \geq \dim(E)$ . Il est alors dense.

Autrement dit, lorsque la condition sur les dimensions est satisfaite, deux sous-espaces *en position générale* sont transverses.

**Proposition 3.0.22** *Si deux sous-variétés  $Y$  et  $Y'$  de  $X$  sont transverses, alors  $Y \cap Y'$  est ou bien vide, ou bien une sous-variété de codimension*

$$\text{codim}(Y \cap Y') = \text{codim}(Y) + \text{codim}(Y').$$

DÉMONSTRATION : Il s'agit d'une propriété locale. Localement,  $Y$  et  $Y'$  sont définies par des submersions  $f$  et  $f'$ . D'après le lemme 3.0.20,  $(f, f')$  est une submersion, donc  $Y \cap Y'$  est une sous-variété.  $\square$

EXERCICE : Etudier l'intersection d'un tore de révolution avec une famille de plans parallèles.

## 3.1 Orientation

### 3.1.1 Rappel : orientation d'un espace vectoriel

Certaines opérations de la géométrie euclidienne, comme le produit mixte et le produit vectoriel, nécessitent le choix d'une orientation. Par exemple, la définition du produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace ambiant nécessite la convention des 3 doigts de la main droite.

En effet, le produit mixte de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  euclidien, c'est, au signe près, le déterminant dans une base orthonormée. Mais deux bases orthonormées diffèrent d'une isométrie dont le déterminant peut valoir 1 ou  $-1$ , d'où une ambiguïté sur le signe, qu'on lève en fixant une fois pour toute une classe d'équivalence de bases de même signe.

Bien qu'on l'ait motivée par des considérations euclidiennes, et qu'on y pense souvent en termes euclidiens (une base du plan est directe si et seulement si les vecteurs forment un angle compris entre 0 et  $\pi$ , elle est indirecte si et seulement si les vecteurs forment un angle compris entre  $\pi$  et  $2\pi$ ), la notion d'orientation ne nécessite pas de structure euclidienne. Toute bijection linéaire entre espaces vectoriels transporte les orientations de l'un sur l'autre.

### 3.1.2 Orientation d'une variété

**Définition 3.1.1** *Soit  $X$  une variété. Orienter  $X$ , c'est choisir une orientation de chaque espace tangent de façon continue, i.e., si  $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  est une carte, les orientations transportées par les différentielles  $d_x\phi : T_xX \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont toutes les mêmes.*

REMARQUES : Définition équivalente. Orienter  $X$ , c'est choisir un atlas formé de cartes à valeurs dans des espaces vectoriels orientés, telles que les changements de cartes préservent l'orientation.

En effet, un tel atlas permet d'orienter de façon continue les espaces tangents. Réciproquement, une fois les espaces tangents orientés, l'atlas des cartes préservant l'orientation convient.

### 3.1.3 Orientabilité

**Définition 3.1.2** Une variété est orientable si elle possède une orientation.

EXEMPLE : La sphère est orientable.

En effet, on peut définir sa structure différentielle au moyen de 2 cartes seulement, donc un seul changement de cartes, qu'on peut supposer direct. Autre procédé : fixer une orientation sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ , munir  $T_v S^n = v^\perp$  de la classe des bases  $(v_1, \dots, v_n)$  telles que  $(v_1, \dots, v_n, v)$  est une base directe de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 3.1.3** Soit  $G$  un groupe discret qui agit librement et proprement par difféomorphismes d'une variété  $V$ . Alors la variété quotient  $X = G \backslash V$  est orientable si et seulement si  $V$  est orientable et  $G$  préserve l'orientation.

DÉMONSTRATION : Si  $X$  est orienté, on peut tirer en arrière l'orientation de  $X$  par le revêtement  $p : V \rightarrow X$ , en une orientation de  $V$  qui est préservée par les transformations de revêtements. Réciproquement, si  $G$  préserve l'orientation, celle-ci passe au quotient sans ambiguïté.  $\square$

**Corollaire 3.1.4** L'espace projectif réel  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est orientable si et seulement si  $n$  est impair.

DÉMONSTRATION :  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = G \backslash S^n$  est engendré par l'antipodie  $a : v \mapsto -v$ .  $a$  préserve (resp. change) l'orientation de  $\mathbb{R}^{n+1}$  si et seulement si  $n$  est impair (resp. pair), et  $a$  préserve la normale sortante, donc  $a$  préserve (resp. change) l'orientation de  $S^n$  si et seulement si  $n$  est impair (resp. pair).  $\square$

**Proposition 3.1.5** Toute variété  $X$  possède un revêtement à deux feuillets  $p : X^{or} \rightarrow X$ , appelé revêtement d'orientation, qui a la propriété suivante :  $X^{or}$  est trivial si et seulement si  $X$  est orientable. De plus,  $X^{or}$  est une variété orientable, et  $X$  est le quotient de  $X^{or}$  par une action du groupe à deux éléments.

DÉMONSTRATION : Soit  $X^{or}$  l'ensemble des couples  $(x, o_x)$  où  $o_x$  est une orientation de  $T_x X$ . On note  $p : X^{or} \rightarrow X$ ,  $(x, o_x) \mapsto x$ . Si  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une carte, et si  $\mathbb{R}^n$  est muni d'une orientation  $o$ , on définit une section  $s_{U, \phi, o}$  de  $p$  au-dessus de  $U$  par  $s_{U, \phi, o}(x) = (x, (d_x \phi)^{-1}(o))$ . Les ensembles  $s_{U, \phi, o}(U)$  forment la base d'une topologie sur  $X^{or}$ , qui rend  $p$  et les  $s_{U, \phi, o}$  continues. Comme  $p^{-1}(U) = s_{U, \phi, o}(U) \sqcup s_{U, \phi, -o}(U)$ ,  $p$  est un revêtement. Comme il n'a que 2 feuillets, il est automatiquement galoisien.

Par définition, une orientation d'un ouvert  $V$  de  $X$  correspond à une section continue de  $p$  au-dessus de  $V$ . Par conséquent,  $X$  est orientable si et seulement si  $p$  possède une section globale. Pour un revêtement galoisien, cela équivaut à être trivial.

Sur l'image  $s_{U, \phi, o}(U)$ ,  $\phi \circ p$  est un homéomorphisme sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On obtient ainsi une structure différentielle sur  $X^{or}$  qui fait de  $p$  un difféomorphisme local (cf. proposition ??). Cet atlas définit une orientation. En effet, étant données deux cartes  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\phi' : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  et

des orientations  $o$  et  $o'$  sur  $\mathbb{R}^n$  telles que  $s_{U,\phi,o}(U) \cap s_{U',\phi',o'}(U') \neq \emptyset$ , nécessairement  $(d_x\phi)^{-1}(o) = (d_x\phi')^{-1}(o')$  aux points de  $U \cap U'$ , donc le changement de cartes  $\phi' \circ p \circ (\phi \circ p)^{-1} = \phi' \circ \phi^{-1}$  préserve l'orientation. Cela prouve que  $X^{or}$  est orientable.  $\square$

**Corollaire 3.1.6** *Toute variété simplement connexe est orientable.*

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Si  $X = G \setminus E$  n'est pas orientable, et si  $E$  est orientable, alors  $X^{or} = G^+ \setminus E$ , où  $G^+$  est le sous-groupe de  $G$  formé des difféomorphismes qui préservent l'orientation.
2. La *bande de Möbius* est le quotient d'une bande infinie  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 1\}$  par le groupe engendré par le difféomorphisme  $g : (x, y) \mapsto (x + 1, -y)$ . Elle n'est pas orientable. Son revêtement des orientations est difféomorphe à la bande ordinaire. Remarquer que  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  contient une bande de Möbius.
3. La bijection affine  $g$  ci-dessus normalise le groupe des translations entières (i.e. si  $\tau \in \mathbb{Z}^2$  est une translation entière, alors  $g \circ \tau \circ g^{-1}$  est encore une translation entière). Par conséquent, elle induit un difféomorphisme  $\bar{g}$  du tore  $\mathbb{Z}^2 \setminus \mathbb{R}^2$ , qui engendre un groupe  $\bar{G}$  à 2 éléments. La *bouteille de Klein* est le quotient du tore par  $\bar{G}$ . Son revêtement des orientations est le tore.

## 3.2 Eléments de topologie différentielle

Désormais, on va donner quelques résultats de *topologie différentielle*, i.e. qui tournent autour du problème de classification des variétés. Les démonstrations ne seront pas toujours complètes.

### 3.2.1 Régularité

Du point de vue de la topologie différentielle, il n'y a aucune différence entre  $C^1$ ,  $C^r$ ,  $r \geq 2$ ,  $C^\infty$  (ou même  $C^\omega$ , mais cela demande davantage de travail). On va montrer que toute structure différentielle de classe  $C^2$  possède un atlas compatible de classe  $C^\infty$ .

**Lemme 3.2.1** *Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété compacte de classe  $C^r$ ,  $r \geq 2$ . Alors il existe un voisinage  $U$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^n$  et une rétraction de classe  $C^{r-1} : U \rightarrow X$ .*

REMARQUES : On appelle  $U$  un *voisinage tubulaire* de  $X$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

DÉMONSTRATION : Pour  $x \in X$ , on note  $\pi_x : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x X$  le projecteur orthogonal (il dépend  $C^{r-1}$  de  $x$ ),  $\nu_x = \ker \pi_x$  et  $\nu X = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^n \mid v \in \nu_x\}$ .

Montrons que  $\nu X$  est une sous-variété de classe  $C^{r-1}$ . Pour  $x$  voisin de  $x_0$ , la restriction de  $\pi_{x_0}$  à  $T_x X$  est bijective. Autrement dit,  $\ker(\pi_{x_0} \circ \pi_x) = \ker \pi_x = \nu_x$ . Par conséquent, au voisinage de  $\{x_0\} \times \nu_{x_0}$ ,  $\nu X$  est défini par l'équation  $g(x, v) = 0$  où  $g : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow T_{x_0} X$  est définie par  $g(x, v) = \pi_{x_0} \circ \pi_x(v)$ .  $g$  est une submersion en tout point de  $\{x_0\} \times \nu_{x_0}$ , donc  $\nu X$  est une sous-variété.

L'application  $\phi : \nu X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x, v) \mapsto x + v$  est une immersion en tout point de  $X \times \{0\}$ . Montrons qu'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\phi$  est injective sur l'ouvert  $V = \{(x, v) \in \nu X \mid |v| < \epsilon\}$ . Sinon, il existe des suites  $(x_j, v_j)$  et  $(y_j, w_j) \in \nu X$ , avec  $|v_j|$  et  $|w_j|$  tendant vers 0, telles que  $\phi(x_j, v_j) = \phi(y_j, w_j)$ . Par compacité, on peut supposer que  $x_j$  tend vers  $x$  et  $y_j$  vers  $y$ . Nécessairement,

$$x = \phi(x, 0) = \lim \phi(x_j, v_j) = \lim \phi(y_j, w_j) = \phi(y, 0) = y.$$

Or, comme  $\phi$  est une immersion en  $(x, 0)$ , il existe un voisinage de  $(x, 0)$  sur lequel  $\phi$  est injective, contradiction.

$U = \phi(V)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'application  $\phi^{-1}$  composée avec la projection  $X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$  est la rétraction cherchée.  $\square$

**Définition 3.2.2** Soit  $X$  un espace topologique compact. Sur l'ensemble  $\mathcal{A}_r$  des atlas de classe  $C^r$  de  $X$ , on met la topologie dont une base de voisinages est obtenue comme suit. Soit  $(\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n)$  un atlas. Soit  $K_i \subset U_i$  des compacts. Soit  $\epsilon > 0$ . On considère les atlas  $(\phi'_i : U'_i \rightarrow \mathbb{R}^n)$  tels que  $K_i \subset U'_i$ , et  $|\phi'_i \circ \phi_i^{-1} - \text{id}|_{C^r(\phi_i(K_i))} < \epsilon$ .

**Proposition 3.2.3** Pour tout  $r \geq 1$ ,  $\mathcal{A}_\infty$  est dense dans  $\mathcal{A}_r$ . De plus, deux atlas de  $\mathcal{A}_r$  suffisamment voisins définissent des structures différentielles difféomorphes sur  $X$ .

DÉMONSTRATION : On peut lisser un  $C^1$ -difféomorphisme par convolution. Sur l'intérieur d'un compact contenu dans le domaine, une application  $C^1$  proche d'un difféomorphisme est à nouveau un difféomorphisme. Cela montre la densité.

Supposons  $r \geq 2$ . Soit  $(\phi_i)$  un atlas. Le théorème de plongement de Whitney fournit un plongement  $f_{(\phi_i)} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si  $(\psi_i)$  est un atlas suffisamment proche de  $(\phi_i)$ , le plongement  $f_{(\psi_i)}$  est  $C^0$ -proche de  $f_{(\phi_i)}$ . En particulier, son image est contenue dans un voisinage tubulaire de  $f_{(\phi_i)}$ . En composant  $f_{(\psi_i)}$  avec la rétraction, on obtient un difféomorphisme de  $(X, (\psi_i))$  sur  $(X, (\phi_i))$ . Le cas  $r = 1$  demande davantage de travail.  $\square$

REMARQUES : La proposition 3.2.3 montre que la classification des variétés compactes à difféomorphisme près doit s'exprimer au moyen d'invariants discrets, par exemple, à valeurs entières, et non continus.

En fait, elle montre que l'ensemble des classes de difféomorphisme de variétés compactes est dénombrable.

### 3.2.2 Classification des variétés de dimension 1

**Théorème 8** Toute variété compacte connexe de dimension 1 est difféomorphe à  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

DÉMONSTRATION : On commence par supposer la variété de classe  $C^r$  avec  $r \geq 2$ .

1. Cas orientable. Soit  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  un atlas fini définissant une orientation de  $X$ . Notons  $\zeta$  un champ de vecteurs constant sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $(\chi_i)$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $(U_i)$ . Posons  $\xi = \sum_i \chi_i (\phi_i^{-1})_* \zeta$ . Alors  $\xi$  est un champ de vecteurs différentiable sur  $X$ , qui ne s'annule jamais. En effet, pour tous indices  $i$  et  $j$ ,  $(\phi_j \phi_i^{-1})_* \zeta = \lambda_{i,j} \zeta$  où la fonction  $\lambda_{i,j}$  est strictement positive. Alors

$$(\phi_j)_* \xi = \left( \sum_i \chi_i \lambda_{i,j} \right) \zeta,$$

et  $\sum_i \chi_i \lambda_{i,j} > 0$  partout. Pour  $x \in X$ , notons  $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow X$  la ligne intégrale de condition initiale  $x$ . Alors le vecteur vitesse  $\gamma'_x(t) = \xi(\gamma_x(t))$  ne s'annule pas, donc  $\gamma_x$  est une immersion, et son image, l'orbite de  $x$ , est un ouvert de  $X$ . Comme les orbites partitionnent  $X$ , et  $X$  est connexe, il y a une seule orbite, donc  $\gamma_x$  est surjective. Si  $\gamma_x$  était injective, alors  $\gamma_x$  serait un homéomorphisme, ce qui est impossible, car  $\mathbb{R}$  n'est pas compact. On conclut qu'il existe  $s, s' \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq s'$ , tels que  $\gamma_x(s) = \gamma_x(s')$ . Alors  $t \mapsto \gamma_x(t+s)$  et  $t \mapsto \gamma_x(t+s')$  sont des lignes intégrales de  $\xi$  de même condition initiale, donc  $\gamma_x(t+s) = \gamma_x(t+s')$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En particulier,  $\gamma_x$  est  $|s' - s|$ -périodique. Soit  $T$  la plus petite période de  $\gamma_x$ . Alors  $\gamma_x$  passe au quotient en un difféomorphisme  $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow X$  préservant l'orientation.

2. Cas non orientable. Soit  $X^{or}$  le revêtement des orientations de  $X$ . Alors  $X^{or}$  est orientable, donc  $X^{or}$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , et  $X = G \backslash X^{or}$  où  $G$  est un groupe à deux éléments engendré par un difféomorphisme  $a$  de  $X^{or}$  renversant l'orientation. Alors  $a$  se relève en un automorphisme  $\tilde{a}$  du revêtement universel  $\tilde{X} = \widetilde{X^{or}} = \mathbb{R}$ , qui renverse l'orientation. Autrement dit,  $\tilde{a}$  est une fonction dont la dérivée est partout strictement négative. Elle tend vers  $\mp\infty$  en  $\pm\infty$ . D'après le théorème



des valeurs intermédiaires, l'équation  $\tilde{a}(t) = t$  possède une solution, ce qui est impossible pour un automorphisme d'un revêtement. On conclut que  $X$  est forcément orientable.

3. Cas des variétés de classe  $C^1$ . Il suffit de remarquer qu'intégrer un champ de vecteurs en dimension 1, ce n'est rien d'autre qu'intégrer une fonction, donc un champ de vecteurs de classe  $C^0$  seulement possède des lignes intégrales.  $\square$

REMARQUES : Pour peu qu'on sache construire des partitions de l'unité, le même argument montre que toute variété séparée, paracompacte, non compacte, connexe de dimension 1 est difféomorphe à  $\mathbb{R}$ .

### 3.3 Caractéristique d'Euler-Poincaré

#### 3.3.1 Décompositions cellulaires convexes

Une *décomposition cellulaire convexe* d'un compact  $K$  du plan, c'est une collection finie segments de droites (appelés *arêtes*) contenus dans  $K$  telle que

1. deux arêtes distinctes sont disjointes ou partagent une extrémité ;
2. la frontière de  $K$  est une réunion d'arêtes ;
3. chaque composante connexe du complémentaire de la réunion des arêtes est convexe.

On appelle les adhérences de ces composantes les *faces* de la décomposition cellulaire. On appelle *sommets*) les extrémités des arêtes.

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Si  $K$  est un polygone convexe, il admet une décomposition cellulaire à une seule face, dont les arêtes sont les côtés de  $K$ .
2. Si  $K$  est une ligne polygonale sans auto-intersection, il admet une décomposition cellulaire naturelle.

**Définition 3.3.1** Soit  $\mathcal{C}$  une décomposition cellulaire convexe d'un compact du plan. On note  $S$  le nombre de sommets,  $A$  le nombre d'arêtes,  $F$  le nombre de faces. On appelle caractéristique d'Euler-Poincaré de  $\mathcal{C}$  le nombre  $\chi(\mathcal{C}) = S - A + F$ .

EXEMPLES ET REMARQUES :

1. Pour la décomposition cellulaire à 1 face d'un polygone convexe,  $\chi = 1$ .
2. Si  $K$  est une ligne polygonale ouverte (i.e. ses extrémités sont distinctes), alors  $\chi = 1$ . Si  $K$  est une ligne polygonale fermée,  $\chi = 0$ .

**Proposition 3.3.2** Soit  $\mathcal{C}$  une décomposition cellulaire convexe d'un polygone convexe du plan. Alors  $\chi(\mathcal{C}) = 1$ .

DÉMONSTRATION : Si  $s$  est un sommet et  $f$  une face qui lui est adjacente (i.e.  $s \in \bar{f}$ ), notons  $int(s, f) \in ]0, \pi[$  l'angle intérieur de  $f$  en  $s$ , et  $ext(s, f) = \pi - int(s, f)$  l'angle extérieur de  $f$  en  $s$ .

Notons  $ext(f)$  la somme des angles extérieurs de  $f$  en tous ses sommets. Alors  $ext(f) = 2\pi$ . En effet, lorsqu'on parcourt le bord de la face  $f$ , à chaque sommet  $s$  la direction suivie tourne de  $ext(s, f)$ , et lorsque le tour est fini, la direction a fait un tour complet.

Notons  $int(s)$  la somme des angles intérieurs en  $s$  des faces de  $\mathcal{C}$  adjacentes à  $s$ . Alors  $int(s) = 2\pi$  si  $s$  est à l'intérieur de  $K$ . Sinon,  $int(s) = int(s, K)$  est l'angle intérieur de  $K$  en  $s$ . On note  $S_{int}$  le nombre de sommet intérieurs et  $S_{\partial K}$  le nombre de sommets du bord, de sorte que  $S = S_{int} + S_{\partial K}$ .

On calcule

$$\begin{aligned} \sum_{(s,f)} ext(s,f) &= \sum_f \sum_{s \text{ sommet de } f} ext(s,f) \\ &= \sum_f ext(f) \\ &= 2\pi F. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{(s,f)} int(s,f) &= \sum_s \sum_{f \text{ adjacente à } s} int(s,f) \\ &= \sum_s int(s) \\ &= 2\pi S_{int} + \sum_{s \in \partial K} int(s,K) \\ &= 2\pi S_{int} + \sum_{s \in \partial K} (\pi - ext(s,K)) \\ &= 2\pi S_{int} + \pi S_{\partial K} - 2\pi. \end{aligned}$$

Si  $a$  est une arête orientée de  $\mathcal{C}$ , qui n'est pas contenue dans le bord de  $K$ , il lui correspond un couple  $(s, f)$  tels que  $s$  est un sommet de  $f$  :  $s$  est l'origine de  $a$  et  $f$  la face dont un côté est  $a$ , située à gauche de  $a$ . Si  $a$  est une arête de  $\partial K$ , il y a exactement une des deux orientations pour laquelle la face située à gauche existe. Réciproquement, étant donné un couple  $(s, f)$  tels que  $s$  est un sommet de  $f$ , il lui correspond une arête orientée, celle telle que, lorsqu'on la parcourt, on a la face  $f$  à sa gauche. Par conséquent, le nombre de couples  $(s, f)$  tels que  $s$  est un sommet de  $f$  est égal au nombre d'arêtes intérieures orientées plus le nombre d'arêtes du bord, sans orientation. Si on note  $A_{int}$  le nombre d'arêtes intérieures et  $A_{\partial K}$  le nombre d'arêtes du bord, de sorte que  $A = A_{int} + A_{\partial K}$ , il vient

$$\sum_{(s,f)} 1 = 2A_{int} + A_{\partial K}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{(s,f)} int(s,f) + \sum_{(s,f)} ext(s,f) &= \sum_{(s,f)} \pi \\ &= \pi(2A_{int} + A_{\partial K}), \end{aligned}$$

d'où

$$2\pi F + 2\pi S_{int} + \pi S_{\partial K} - 2\pi = 2\pi A_{int} + \pi A_{\partial K},$$

ce qui peut s'écrire

$$S_{int} - A_{int} + F = 1 - \frac{1}{2}(S_{\partial K} - A_{\partial K}),$$

ou

$$\chi(\mathcal{C}) = 1 + \frac{1}{2}\chi(\partial K).$$

Comme le bord de  $K$  est une ligne polygonale fermée,  $\chi(\partial K) = 0$ , donc  $\chi(\mathcal{C}) = 1$ .  $\square$

### 3.3.2 Invariance de la caractéristique d'Euler-Poincaré

**Lemme 3.3.3** *Si  $K = K_1 \cup K_2$  et  $\mathcal{C}$  est une décomposition cellulaire convexe de  $K$  qui induit des décompositions cellulaires  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_0$  sur  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_0 = K_1 \cap K_2$ , alors*

$$\chi(\mathcal{C}) = \chi(\mathcal{C}_1) + \chi(\mathcal{C}_2) - \chi(\mathcal{C}_0).$$

DÉMONSTRATION : Chaque sommet (resp. arête, resp. face) de  $\mathcal{C}_0$  est aussi un sommet (resp. arête, resp. face) de  $\mathcal{C}_1$  et de  $\mathcal{C}_2$  simultanément, donc  $S = S_1 + S_2 - S_0$ ,  $A = A_1 + A_2 - A_0$ ,  $F = F_1 + F_2 - F_0$ .  
□

**Proposition 3.3.4** *Soit  $K$  un polygone du plan. Deux décompositions cellulaires convexes de  $K$  donnent la même caractéristique d'Euler-Poincaré.*

DÉMONSTRATION : Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux décompositions cellulaires convexes de  $K$ .

1. Réduction au cas où  $\mathcal{C}'$  est plus fine que  $\mathcal{C}$ .

Comme l'intersection de deux polygones convexes est un polygone convexe, il y a une décomposition cellulaire convexe de  $K$  dont les faces sont les intersections de faces de  $\mathcal{C}'$  et de faces de  $\mathcal{C}$ . Il suffit de montrer que cette décomposition, raffinement de  $\mathcal{C}'$  et de  $\mathcal{C}$ , a même caractéristique d'Euler-Poincaré que  $\mathcal{C}$ .

2. Cas où  $\mathcal{C}$  n'a aucune face.

Dans ce cas,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont deux graphes homéomorphes. Il ont donc les mêmes composantes connexes, qui ont mêmes connectivités  $A - S + 1$  (voir cours sur le groupe fondamental), donc même caractéristique d'Euler-Poincaré. On peut aussi remarquer que subdiviser les arêtes ne change pas  $S - A$ .

3. Récurrence sur le nombre de faces de  $\mathcal{C}$ .

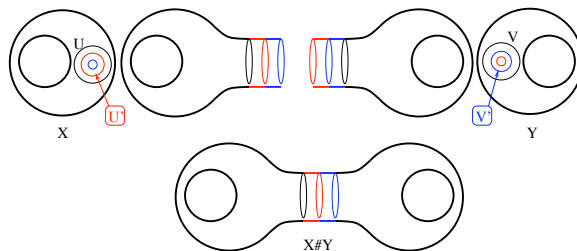
On retire l'intérieur de toutes ses faces à  $\mathcal{C}$ , on obtient un graphe  $K_0$  muni de deux décompositions  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}'_0$ . Puis on ajoute l'intérieur d'une face de  $\mathcal{C}$ , cela donne un polygone  $K_1$  muni de deux décompositions  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}'_1$  plus fine, etc... Supposons que  $\chi(\mathcal{C}_k) = \chi(\mathcal{C}'_k)$ . Par définition,  $\chi(\mathcal{C}_{k+1}) = \chi(\mathcal{C}_k) + 1$ . Remarquer que  $K_{k+1} = K_k \cup f$  où  $f$  est une seule face de  $\mathcal{C}$ , mais est décomposée en plusieurs faces au sens de  $\mathcal{C}'$ . D'après le lemme 3.3.3,  $\chi(\mathcal{C}'_{k+1}) = \chi(\mathcal{C}'_k) + \chi(f) - \chi(K_k \cap f) = \chi(\mathcal{C}'_k) + 1$ , car  $K_k \cap f$  est une ligne polygonale fermée sans point double. Cela montre que  $\chi(\mathcal{C}'_{k+1}) = \chi(\mathcal{C}_{k+1})$ , et donc que  $\chi(\mathcal{C}') = \chi(\mathcal{C})$ , par récurrence sur  $k$ . □

## 3.4 Variétés compactes de dimension 2

On commence par construire des exemples.

### 3.4.1 Somme connexe

Soit  $X$  et  $Y$  deux variétés de même dimension  $n$ . Notons  $B$  la boule ouverte de centre 0 et de rayon 2 dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $B'$  la boule unité ouverte. Soit  $U$  un ouvert de  $X$ ,  $V$  un ouvert de  $Y$ ,  $\phi$  un difféomorphisme de  $U$  sur  $B$  et  $\psi$  un difféomorphisme de  $V$  sur  $B$ . On note  $U' = \phi^{-1}(B')$  et  $V' = \psi^{-1}(B')$ . On considère l'espace topologique  $X \# Y$  obtenu recollant  $X \setminus U'$  et  $Y \setminus V'$  le long de leur bord, au moyen de l'homéomorphisme  $\psi^{-1} \circ \phi|_{\partial U'}$ . Noter que  $X \# Y$  dépend des choix de  $\phi$  et  $\psi$ .



On munit  $X\sharp Y$  d'une structure différentielle comme suit. L'atlas contient toutes les cartes de  $X$  et de  $Y$  dont le domaine ne rencontre pas  $U'$  ou  $V'$ . Il contient aussi une carte  $\Phi$  dont le domaine est  $(U \setminus U') \cup (V \setminus V')$  (vu comme un ouvert de  $X\sharp Y$ ), et définie par

$$\begin{cases} \Phi(x) = \phi(x) & \text{si } x \in U \setminus U', \\ \Phi(y) = \frac{\psi(y)}{|\psi(y)|^2} & \text{si } y \in V \setminus V'. \end{cases}$$

**Définition 3.4.1** On appelle somme connexe de  $X$  et  $Y$  suivant  $\phi$  et  $\psi$  la variété ainsi obtenue.

EXEMPLE : Si  $Y = S^n$  est la sphère de dimension  $n$ , et  $\psi : V \rightarrow B$  est donné par la projection stéréographique, alors  $X\sharp_\psi Y$  est difféomorphe à  $X$ .

En effet, l'inversion  $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$  se prolonge en un difféomorphisme global  $i$  de  $S^n$ . On définit un difféomorphisme  $\Psi$  de  $X\sharp S^n$  sur  $X$  en posant,

$$\begin{cases} \Psi(x) = x & \text{si } x \in X \setminus U', \\ \Psi(y) = \phi^{-1} \circ i(y) & \text{si } y \in S^n \setminus V'. \end{cases}$$

REMARQUES : Si  $n \geq 3$ ,  $\pi_1(X\sharp Y) = \pi_1(X) \star \pi_1(Y)$  est un produit libre. Si  $n = 2$ ,  $\pi_1(X\sharp Y) = \pi_1(X \setminus U') \star_{\mathbb{Z}} \pi_1(Y \setminus V')$  est une somme amalgamée au-dessus de  $\mathbb{Z}$ .

Cela permet de voir qu'en général  $X\sharp Y$  n'est difféomorphe ni à  $X$  ni à  $Y$ .

### 3.4.2 Dépendance par rapport aux choix

**Proposition 3.4.2** Soit  $X$  et  $Y$  des variétés connexes. A difféomorphisme près, la variété  $X\sharp Y$  ne dépend que de l'orientation de  $\phi$  et de  $\psi$ . Précisément,

1. si  $X$  ou  $Y$  n'est pas orientable,  $X\sharp Y$  est indépendante des choix;
2. si  $X$  (ou  $Y$ ) est orientable et admet un difféomorphisme renversant l'orientation,  $X\sharp Y$  est indépendante des choix;
3. si  $X$  et  $Y$  sont orientables, on peut obtenir au plus deux variétés  $X\sharp Y$ , suivant que  $\psi^{-1} \circ \phi$  préserve ou non l'orientation.

DÉMONSTRATION : Soit  $U_1$  et  $U_2$  deux ouverts contenant un point  $x$  de  $X$ , soit  $\phi_1 : U_1 \rightarrow B$  et  $\phi_2 : U_2 \rightarrow B$  deux difféomorphismes sur la boule  $B$  de rayon 2, envoyant  $x$  en 0, et ayant même différentielle en  $x$ . Posons  $U_{i,\epsilon} = \phi_i^{-1}(B(0, 2\epsilon))$ ,  $\phi_{i,\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}(\phi_i)|_{U_{i,\epsilon}} : U_{i,\epsilon} \rightarrow B$ . D'après le lemme 3.2.3, la structure différentielle sur  $X\sharp_{\phi_{i,\epsilon}} Y$  ne dépend pas de  $\epsilon$ . Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0,  $\phi_{1,\epsilon}^{-1} \circ \phi_{2,\epsilon}$  converge vers l'identité, donc pour  $\epsilon$  assez petit,  $X\sharp_{\phi_{1,\epsilon}} Y$  et  $X\sharp_{\phi_{2,\epsilon}} Y$  sont difféomorphes. On conclut que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  définissent la même somme connexe. Celle-ci ne dépend donc que de la donnée de points  $x \in X$  et  $y \in Y$ , ainsi que d'isomorphismes linéaires de  $\mathbb{R}^n$  sur  $T_x X$  et  $T_y Y$  respectivement. Comme  $X$  et  $Y$  sont connexes par arcs, le choix des points est sans importance. De même, seule compte

la composante connexe de  $Isom(T_x X, \mathbb{R}^n)$  à laquelle  $d_x \phi$  appartient, i.e. le fait que  $\phi$  préserve ou non l'orientation.

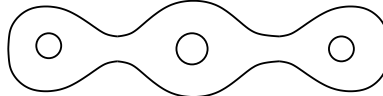
Si  $X$  n'est pas orientable, il existe un lacet dans  $X$  basé en  $x$  dont le relèvement dans le revêtement des orientations  $X^{or}$  n'est pas un lacet. On peut donc déformer continûment  $\phi$  en un difféomorphisme  $\phi'$  d'un voisinage de  $x$  sur la boule  $B$  tel que  $\phi^{-1} \circ \phi'$  renverse l'orientation. Cela signifie que  $X \#_{\phi} Y = X \#_{\phi'} Y$  ne dépend pas de la composante connexe de  $Isom(T_x X, \mathbb{R}^n)$  à laquelle  $d_x \phi$  appartient.

Si  $X$  possède un difféomorphisme global  $\Phi$  qui renverse l'orientation, celui-ci induit un difféomorphisme de  $X \#_{\phi} Y$  sur  $X \#_{\Phi \circ \phi} Y$ , et de nouveau  $X \#_{\phi} Y$  ne dépend pas de la composante connexe de  $Isom(T_x X, \mathbb{R}^n)$  à laquelle  $d_x \phi$  appartient.  $\square$

**Terminologie.** Dans la suite, lorsque  $X$  et  $Y$  sont orientables, on notera  $X \# Y$  celle des sommes connexes qui est orientable (obtenue à l'aide d'une carte orientée de  $X$  et d'une carte de  $Y$  renversant l'orientation).

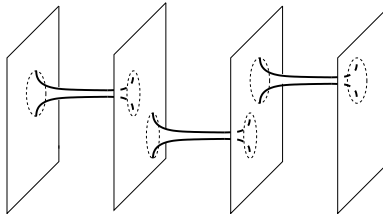
### 3.4.3 Exemples de variétés de dimension 2

**Définition 3.4.3** Soit  $g \in \mathbb{N}$  un entier. On appelle surface orientable de genre  $g$ , et on note  $\Sigma_g$ , la variété obtenue à partir de la sphère en effectuant  $g$  sommes connexes avec un tore.



Surface orientable de genre 3

**Définition 3.4.4** Soit  $g \in \mathbb{N}$  un entier. On appelle surface non orientable de genre  $g$ , et on note  $U_g$ , la variété obtenue à partir du plan projectif en effectuant  $g$  sommes connexes avec un plan projectif.



La surface non orientable de genre 3

### 3.4.4 Décompositions cellulaires lisses

Voici une généralisation, invariante par difféomorphisme, de la notion de décomposition en cellulaire convexe.

**Définition 3.4.5** Soit  $X$  une variété de dimension 2, et  $K \subset X$  un compact. Une décomposition cellulaire lisse de  $K$ , c'est la donnée d'une famille finie d'arcs de classe  $C^1$  plongés dans  $K$  appelés arêtes tels que

- deux arêtes sont disjointes ou partagent une extrémité;
- pour chaque composante connexe  $D$  du complémentaire dans  $K$  de la réunion des arêtes, il existe un voisinage de l'adhérence de  $D$  qui est l'image par un difféomorphisme  $\Phi$  d'un ouvert  $U$  du plan, tel que  $\Phi^{-1}(D)$  soit un polygone convexe.

Dans ce cas, on appelle *sommets* de la décomposition les extrémités des arêtes et *faces* de la décomposition les composantes connexes du complémentaire de la réunion des arêtes. Si toutes les faces sont des triangles, on parle de *triangulation lisse*. De nouveau, on appelle  $\chi(C) = S - A + F$  la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de la décomposition cellulaire.

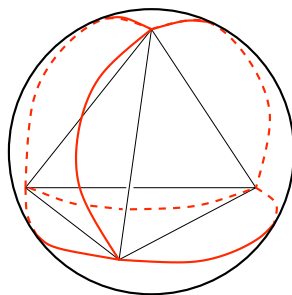
Le lemme 3.3.3 s'étend aux décompositions cellulaires lisses, avec la même preuve.

**Lemme 3.4.6** Si  $K = K_1 \cup K_2$  et  $\mathcal{C}$  est une décomposition cellulaire lisse de  $K$  qui induit des décompositions cellulaires  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_0$  sur  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_0 = K_1 \cap K_2$ , alors

$$\chi(\mathcal{C}) = \chi(\mathcal{C}_1) + \chi(\mathcal{C}_2) - \chi(\mathcal{C}_0).$$

### 3.4.5 Exemples de décompositions cellulaires lisses

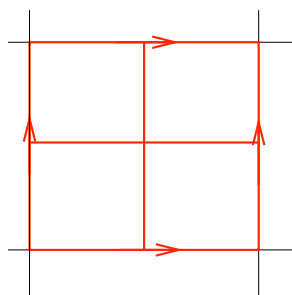
EXEMPLE : La sphère  $S^2$  possède une décomposition cellulaire lisse, obtenue en projetant radialement un tétraèdre régulier.



Il y a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 2.

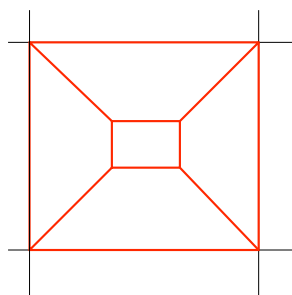
En particulier, le disque possède une décomposition lisse avec 4 sommets, 6 arêtes et 3 faces, donc sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 1.

EXEMPLE : Le tore  $T^2$  possède une décomposition cellulaire lisse.



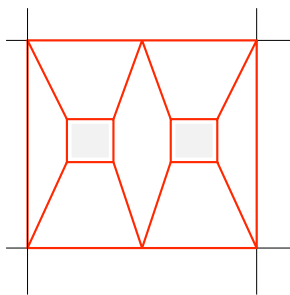
Il y a 2 sommets, 6 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 0.

EXEMPLE : Le tore troué  $T^2 \setminus D$  possède une décomposition cellulaire lisse.



Il y a 5 sommets, 10 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut  $-1$ .

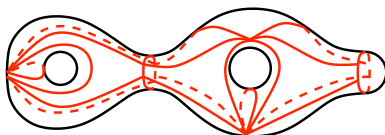
EXEMPLE : Le tore troué deux fois  $T^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$  possède une décomposition cellulaire lisse.



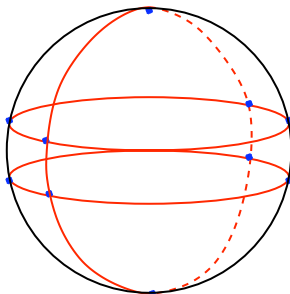
Il y a 10 sommets, 19 arêtes et 7 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut  $-2$ .

EXEMPLE : La surface orientable  $\Sigma_g$  de genre  $g$  possède une décomposition cellulaire, compatible avec une décomposition en un tore troué,  $g - 1$  tores troués deux fois et un disque.

La caractéristique d'Euler-Poincaré de cette décomposition vaut  $2 - 2g$ .



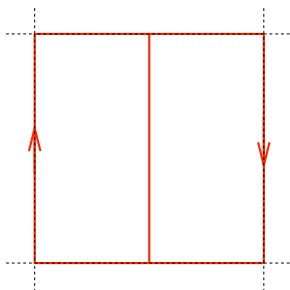
EXEMPLE : La sphère  $S^2$  possède une décomposition cellulaire lisse, invariante par l'antipodie. En quotientant par l'antipodie, on obtient une décomposition cellulaire lisse du plan projectif.



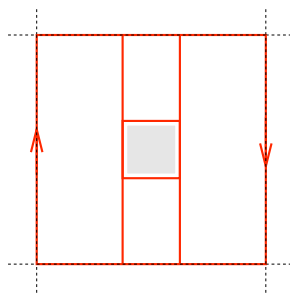
Pour le plan projectif, il y a 5 sommets, 10 arêtes et 6 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 1.

En particulier, le plan projectif privé d'un disque (aussi appelé *bande de Möbius*) possède une décomposition cellulaire lisse avec 4 sommets, 6 arêtes et 2 faces, donc sa caractéristique d'Euler-Poincaré vaut 0.

On peut aussi voir la *bande de Möbius* comme le quotient de la bande  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq y \leq 1/2\}$  par le groupe engendré par  $(x, y) \mapsto (x + 1, -y)$ . La décomposition cellulaire apparaît comme suit.

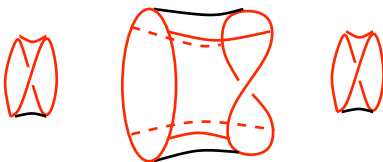


EXEMPLE : La bande de Möbius trouée admet une décomposition cellulaire lisse.



Il y a 10 sommets, 15 arêtes et 4 faces, donc la caractéristique d'Euler-Poincaré vaut  $-1$ .

EXEMPLE : La surface non orientable  $U_g$  possède une décomposition cellulaire lisse compatible avec la décomposition en une bande de Möbius,  $g - 1$  bandes de Möbius trouées, et une bande de Möbius. Sa caractéristique d'Euler-Poincaré égale à  $1 - g$ .



### 3.4.6 Décompositions, revêtements et sommes connexes

**Proposition 3.4.7** Soit  $p : E \rightarrow X$  un revêtement. Soit  $\mathcal{C}$  une décomposition cellulaire lisse de  $X$ . Il existe une unique décomposition cellulaire lisse  $\tilde{\mathcal{C}}$  de  $E$  dont chaque face est envoyée bijectivement sur une face de  $X$ . Si le revêtement a  $d$  feuilletts, alors  $\chi(\tilde{\mathcal{C}}) = d\chi(\mathcal{C})$ .

DÉMONSTRATION : Comme chaque face  $f$  est simplement connexe, le revêtement  $p|_{p^{-1}(f)} : p^{-1}(f) \rightarrow f$  est trivial, i.e.  $p^{-1}(f) = \sqcup_j s_j(f)$  où les  $s_j$  sont des sections de  $p$  au-dessus de  $f$ . La collection des  $s_j(f)$  forme la décomposition  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

Chaque sommet, arête, face de  $\mathcal{C}$  donne naissance à  $d$  sommets, arêtes, faces distincts de  $\tilde{\mathcal{C}}$ , donc  $\tilde{S} = dS, \tilde{A} = dA, \tilde{F} = dF$ .  $\square$

**Proposition 3.4.8** Soit  $X$  et  $Y$  deux variétés compactes de dimension 2. Alors

$$\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

DÉMONSTRATION : D'après la règle d'addition,  $\chi(X) = \chi(X \setminus U) + \chi(U) - \chi(\partial U) = \chi(X \setminus U) + 1$ . De plus

$$\chi(X \# Y) = \chi(X \setminus U) + \chi(Y \setminus V) - \chi(\partial U) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

$\square$

### 3.4.7 Classification des variétés compactes de dimension 2

On admettra les trois théorèmes suivants.

**Théorème 9** Toute variété de dimension 2 compacte admet une triangulation lisse.

**Théorème 10** Soit  $X$  une variété de dimension 2 compacte. Les décompositions cellulaires lisses de  $X$  ont toutes même caractéristique d'Euler-Poincaré, notée  $\chi(X)$ .



EXERCICE : A l'aide de ce théorème, et des propositions 3.4.7 et 3.4.8, retrouver de façon plus directe les résultats numériques du paragraphe précédent.

**Théorème 11** *Les variétés compactes connexes orientables de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. C'est un entier pair  $\leq 2$ . Les variétés compactes connexes sans bord non orientables de dimension 2 sont classifiées par leur caractéristique d'Euler-Poincaré. C'est un entier  $\leq 1$ .*

Autrement dit, toute variété compacte connexe orientable de dimension 2 est difféomorphe à une et une seule des surfaces  $\Sigma_g$ , où, par convention,  $\Sigma_0$  est la sphère. Toute variété compacte connexe orientable de dimension 2 est difféomorphe à une et une seule des surfaces  $U_g$ ,  $g \geq 0$ , où, par convention,  $U_0$  est le plan projectif.

EXERCICE : Dédurre de la classification que toute surface orientable possède un difféomorphisme renversant l'orientation et sans points fixes.

# Table des matières

Laboratoire de Mathématique d'Orsay  
U.M.R. 8628 du C.N.R.S.  
Université de Paris-Sud  
91405 Orsay, France  
`Pierre.Pansu@math.u-psud.fr`  
`http ://www.math.u-psud.fr/~pansu`