Math. Z. 197, 551–559 (1988)

Mathematische Zeitschrift
© Springer-Verlag 1988

Une relation entre diamètre extrinsèque, intégrale de la courbure de Gauss et inradius pour les hypersurfaces localement convexes d'un espace euclidien

François Labourie
Centre de Mathématiques, U.A. du CNRS no 169, Ecole Polytechnique,
F-91128 Palaisean Cedex, France

Introduction

Le but de cet article est de démontrer une inégalité reliant certaines quantités géométriques globales, intrinsèques et extrinsèques, d'une hypersurface localement convexe d'un espace euclidien. En particulier, nous allons étudier la contrainte imposée par le diamètre extrinsèque sur la courbure d'une telle hypersurface. Plus précisement, si nous notons $\mathrm{Inr}(x)$ l'inradius en un point x de l'hypersurface (cf. 1.3), d_e la distance dans $\mathbb{R}^n$, et $K(V)$ l'intégrale de la courbure de Gauss, nous démontrons le résultat suivant:

Théorème. *Soit V une hypersurface localement convexe, contenant un point x tel que*

$$\mathrm{Inr}(x) \geqq \sqrt{2}\, \operatorname*{Sup}_{y \in V} \{d_e(x, y)\},$$

alors l'image de V par l'application de Gauss contient un hémisphère, et en particulier

$$K(V) \geqq \tfrac{1}{2}\, \mathrm{Aire}(S^{n-1}).$$

Ce théorème possède les deux corollaires suivants:

Corollaire 1. *Soit V une hypersurface localement convexe de $\mathbb{R}^n$. Si*

$$\mathrm{Inr}(V) \geqq \sqrt{2}\, \mathrm{Diam}_e(V),$$

alors l'image de V par l'application de Gauss contient un hémisphère, et en particulier

$$K(V) \geqq \tfrac{1}{2}\, \mathrm{Aire}(S^{n-1})$$

(Ici on note $\mathrm{Inr}(V) = \operatorname*{Sup}_{y \in V} \{\mathrm{Inr}(y)\}$ l'inradius de V, et $\mathrm{Diam}_e(V)$ le diamètre extrinsèque de V).

Corollaire 2. *Soit V une surface simplement connexe à bord, localement convexe dans $\mathbb{R}^3$, dont l'intégrale de courbure est inférieure à 2π, alors*

$$A(V) \leqq \sqrt{2}\, L(\delta V)\, \mathrm{Diam}_e(V).$$

(Ici on note $A(V)$ l'aire de V et $L(\delta V)$ la longueur de son bord).

Nous pouvons rattacher ces inégalités à quelques résultats reliant le diamètre extrinsèque à d'autres quantités géométriques.

Le premier résultat concerne les hypersurfaces localement convexes pour lesquelles M. Gromov a montré (cf. [G]):

Théorème. *Soit V une hypersurface localement convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$\mathrm{Inr}(V) \leqq \pi\, \mathrm{Diam}_e(V).$$

La deuxième série de résultats concerne plus spécifiquement les surfaces.

Tout d'abord Yu.D. Burago (cf. [B1]) a montré un résultat qui concerne essentiellement les surfaces de très petite courbure:

Théorème. *Soit V une surface simplement connexe de classe C^3 de $\mathbb{R}^3$. Il existe alors des constantes positives C et C_1, telles que si l'intégrale de la valeur absolue de la courbure de Gauss, $\mu(V)$, est inférieure à C, nous avons*

$$\mathrm{Diam}_e(V) \geqq (\sqrt{3} - C_1\, \mu(V))\, \mathrm{Inr}(V)$$

(Pour C et C_1, nous pouvons prendre 0,02 *et* 1500*).*

Dans le cas des surfaces à courbure positive, le corollaire 1 représente une amélioration de ce résultat.

Enfin Burago et Shefel' (cf. [B2]), ont démontré dans un cadre beaucoup plus général une inégalité importante qui entraine, entre autres, l'incompressibilité des surfaces:

Théorème. *Soit V une surface à bord immergée dans $\mathbb{R}^n$. Alors*

$$A \leqq F(K^+(V), g)(L + \mathrm{Diam}_e(V))^{\frac{13}{7}}\, \mathrm{Diam}_e^{\frac{1}{7}}$$

où g est la valeur absolue de la caractéristique d'Euler de la surface, $K^+(V)$ l'intégrale de la courbure positive (qui correspond dans le cas de $\mathbb{R}^3$ à l'intégrale de la partie positive de la courbure de Gauss) et où nous pouvons prendre pour F la fonction $F(x, y) = \exp(C(1+x+y)\log(1+x+y))$.

Dans notre cas particulier, le corollaire 2 affine cette inégalité. Il est intéressant de remarquer que dans le texte précédemment cité, M. Gromov avait apporté une amélioration du même ordre à l'inégalité de Burago et Shefel' dans le cas d'un disque à courbure négative immergé dans la boule de rayon 1 de $\mathbb{R}^3$.

Notre premier paragraphe sera consacré aux définitions, le deuxième à la discussion des résultats, le troisième aux propriétés préliminaires à la démonstration qui sera faite dans les quatrième et cinquième paragraphes.

1. Définitions

Nous supposerons dans toute la suite que V est une hypersurface sans bord de $\mathbb{R}^n$, et nous noterons par un indice i les quantités intrinsèques et par un indice e les quantités extrinsèques.

1.1. Soit V une hypersurface C^1, de $\mathbb{R}^n$, on dira que V est *localement convexe*, si elle possède un champ continu de vecteurs normaux N, dit *champ normal intérieur*, tel que tout point de V possède un voisinage inclus dans le demi-espace défini par le vecteur normal intérieur en ce point.

Remarques. (i) Si V est une courbe C^2 de $\mathbb{R}^2$, V est localement convexe si et seulement si sa courbure reste, après choix de l'orientation, toujours non négative.

(ii) Si la dimension de V est supérieure à 2, et si V est C^3, V est localement convexe, si et seulement si ses courbures principales sont toutes, après choix de l'orientation, non négatives.

(iii) En particulier, si la courbure sectionnelle de V est strictement positive, V est localement convexe.

1.2. Si V est une hypersurface localement convexe et N son champ de vecteur normal intérieur, on définit pour tout ouvert O de V, *l'intégrale de la courbure de Gauss* $K(O)$, comme étant l'aire de l'image de O par l'application de Gauss sur S^{n-1}.

Dans le cas où V est C^3-immergée, $K(V)$ est exactement l'intégrale de la courbure de Gauss, définie comme le produit des courbures principales, quantité qui ne dépend que de la géométrie intinsèque de V (cf. [S]).

1.3. Soit x un point d'une variété riemannienne, l' *inradius* de V en x, $\mathrm{Inr}(x)$, est défini comme la borne supérieure des rayons des boules de V centrées sur x qui soient complètes.

2. Remarques, contrexemples

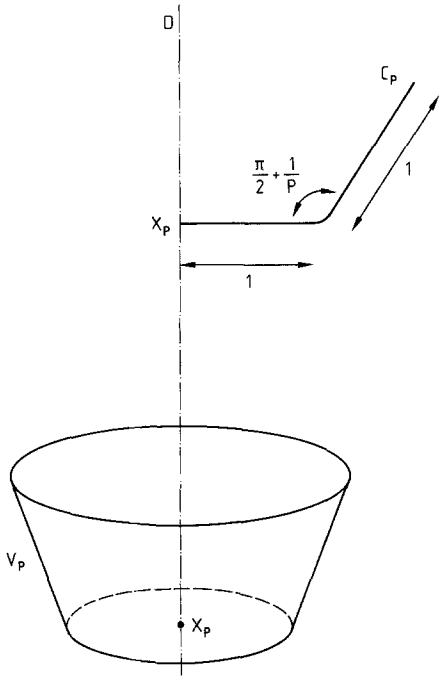
2.1. Remarquons tout d'abord, que dans le théorème, l'inégalité obtenue est la meilleure possible, en ce sens que l'on peut construire une suite d'hypersurfaces localement convexes (V_p) et de points (x_p) de V_p tels que

$$K(V_p) < \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Aire}(S^{n-1})$$

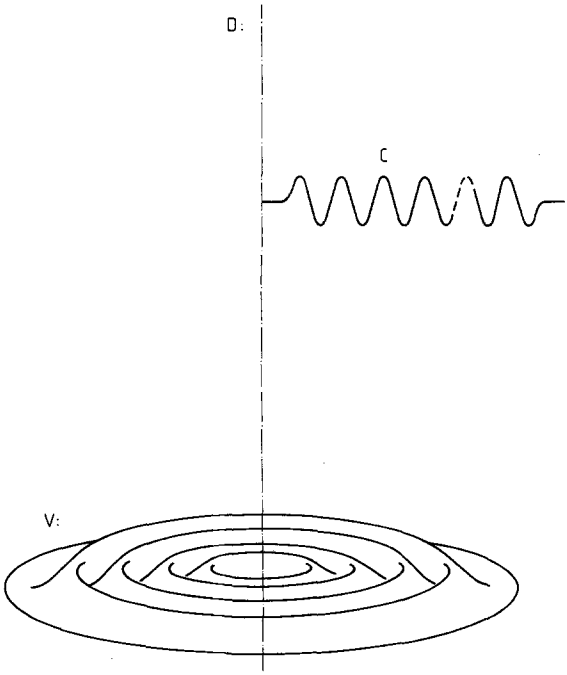
et

$$\frac{\mathrm{Inr}(x_p)}{\sup\limits_{y \in V_p}(d_e(x_p, y))} \text{ tend vers } \sqrt{2}.$$

Il suffit pour cela de considérer les hypersurfaces V_p de $\mathbb{R}^n$, obtenues par la rotation autour d'un axe D de l'arc de courbe c_p:



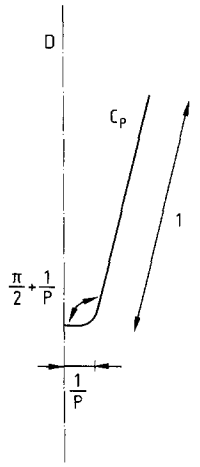
2.2. Le théorème devient faux lorsque l'on ne demande plus à l'hypersurface d'être localement convexe. L'exemple le plus parlant est celui de la surface V, obtenue par la rotation autour de l'axe D de l'arc de courbe c:

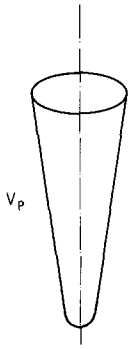


Le théorème de Gauss-Bonnet nous montre que pour cette surface l'intégrale de la courbure de Gauss est nulle, alors que l'on peut, en resserrant les "spires" de c, obtenir un diamètre extrinsèque aussi petit que l'on veut sans modifier l'inradius de la surface.

Dans un cadre plus général, la considération de l'intégrale de la courbure de Gauss est donc manifestement insuffisante. Par contre, les résultats de Burago et Shefel nous laissent peut-être espérer une inégalité du même ordre faisant intervenir l'intégrale de la valeur absolue ou de la partie positive de la courbure de Gauss.

2.3. Ensuite, dans le cas du corollaire 1, l'inégalité ne semble pas être la meilleure possible. On peut sans doute remplacer $\sqrt{2}$ par une constante plus petite, dont nous savons seulement qu'elle est supérieure à 1. Il nous suffit pour cela de considérer la suite d'hypersurfaces (V_p) obtenue par la rotation autour d'un axe D de l'arc de courbe c_p^p:





Cette suite d'hypersurfaces vérifie en effet

$$K(V_p) \leqq \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Aire}(S^{n-1}),$$

et

$$\frac{\mathrm{Inr}(V_p)}{\mathrm{Diam}_e(V)} \text{ tend vers } 1.$$

Cet exemple et le fait que le résultat soit vrai pour les courbes du plan, laissent à penser que la meilleure constante possible est 1.

3. Propriétés préliminaires

Propriété 3.1. *Si E est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ transverse à l'hypersurface localement convexe V, $E \cap V$ est alors une hypersurface localement convexe de E.*

Preuve. Ceci découle immédiatement de la définition. □

On utilisera principalement cette propriété lorsque E est un plan.

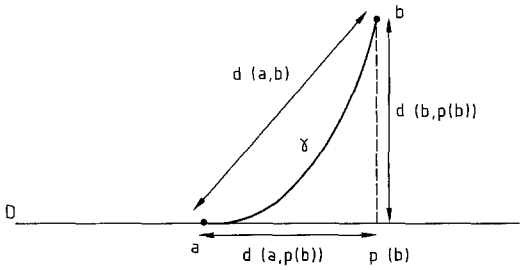
Propriété 3.2. *Soit γ un arc de courbe plan tracé sur une hypersurface localement convexe. Si il existe un point de γ tel que le plan de γ est transverse à V, alors ce plan est transverse à V en tout point de γ.*

Preuve. On considère pour cela l'ensemble W des points de γ en lesquels le plan de γ est transverse à V. Cet ensemble est trivialement cuvert. Il nous suffit donc de montrer qu'il est fermé.

Soit donc z un point de l'adhérence de γ dans V. Si z n'appartient pas à W, cela signifie que le plan P de γ est inclus dans l'hyperplan tangent en ce point. Cet hyperplan étant un hyperplan local d'appui, les points de V proches de z appartenant à cet hyperplan le possède comme hyperplan tangent. Ceci montre la contradiction. □

Propriété 3.3. *Soit γ un arc de courbe plan localement convexe, tel que $K(\gamma) \leqq \frac{\pi}{2}$, alors* $\mathrm{Long}(\gamma) \leqq \sqrt{2}\,\mathrm{Diam}_e(\gamma)$.

Preuve. Soit donc γ un arc de courbe, d'extrémités a et b, vérifiant les conditions de l'énoncé. On note D la droite tangente en a à γ et p la projection sur cette droite. D'après la condition sur la courbure, les vecteurs tangents en γ ne sont jamais perpendiculaires à D. En particulier, γ est le graphe d'une fonction convexe au dessus de D:



On a donc

$$\mathrm{Long}(\gamma) < d(a, p(b)) + d(b, p(b))$$

d'où

$$\mathrm{Long}(\gamma) < (\cos\alpha + \sin\alpha)\, d(a, b)$$

et donc

$$\mathrm{Long}(\gamma) < \sqrt{2}\, \mathrm{Diam}_e c$$

ce qui termine la démonstration. □

4. Preuve du théorème

Soit donc un point x d'une hypersurface localement convexe V, supposée sans bord, tel que

$$\mathrm{Inr}(x) \geqq \sqrt{2}\, \mathop{\mathrm{Sup}}_{y \in V} \{d_e(x, y)\}.$$

On note alors O la composante connexe de x dans l'ensemble W, $W = \{y \in V / \langle N(y), N(x)\rangle > 0\}$, où N désigne le champ normal intérieur à V. On notera également $\bar{O}$ (resp. $\bar{V}$) l'adhérence de O (resp. V) dans $\mathbb{R}^n$.

Nous allons montrer que l'image de O par l'application de Gauss est un hémisphère.

Lemme 4.1. *Soit γ un arc de courbe plan issu de x tracé sur V et sur un plan parallèlle à $N(x)$, γ est alors d'intégrale de courbure inférieure strictement à $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si pour tout z de γ, $\langle N(z), N(x)\rangle$ est non nul.*

Preuve. Nous savons d'après 3.2 que le plan P est transverse à V le long de γ puisque transverse en x. La direction tangente à la courbe γ en un point z est alors donnée par l'unique intersection du plan P et de l'hyperplan tangent en ce point.

En particulier, s'il existe un point z de γ tel que $\langle N(z), N(x)\rangle = 0$, $N(x)$ est alors la direction tangente à γ en z. Puisque $N(x)$ est également le vecteur normal à γ en x et que la courbe γ est localement convexe (cf. 3.1.), son intégrale de courbure est supérieure à $\frac{\pi}{2}$.

Réciproquement, si l'intégrale de courbure est supérieure à $\frac{\pi}{2}$, il existe un point z de γ dont le vecteur tangent u set parallèle à $N(x)$, ce qui entraine que $N(z)$ est orthogonal à $N(x)$. □

Lemme 4.2. *Pour tout y de O, il existe un arc de courbe γ reliant x et y, tracé sur O et sur un clan P parallèlle à $N(x)$. Une telle courbe est nécessairement globalement convexe de longueur inférieure à* $\mathrm{Inr}(x)$ *et d'intégrale de courbure strictement inférieure à $\frac{\pi}{2}$.*

Preuve. Montrons tout d'abord la deuxième partie de l'assertion.

D'après le lemme précédent, l'intégrale de courbure est bien inférieure à

$\frac{\pi}{2}$ puisque γ est incluse dans W. La courbe γ étant localement convexe, elle est alors globalement convexe. De plus 3.3 et la condition sur x entraînent que sa longueur est inférieure strictement à $\mathrm{Inr}(x)$:

$$\mathrm{Long}(\gamma) < \sqrt{2}\,\mathrm{Diam}_e(\gamma) \leqq \mathrm{Inr}(x)$$

Ensuite, on note I l'ensemble des points y de O pour lesquels il existe un arc de courbe γ vérifiant les conditions de l'énoncé.

a) Montrons tout d'abord que I est ouvert.

Soit donc y un point de I et γ la courbe qui lui est associée. Nous savons alors que le plan P de γ est transverse à V le long de γ. En effet P est transverse en x à V d'après les hypothèses, et donc le long de γ d'après 3.2. O étant ouvert, nous en déduisons par transversalité que I est lui-même ouvert.

b) Montrons maintenant que I est fermé dans O.

Soit y un point de O, et (y_n) une suite de points de I tendant vers y. Il nous faut montrer que y appartient à I.

Soit donc (γ_n), la suite de courbes associées aux y_n. La longueur des γ_n étant uniformément bornée par $\mathrm{Inr}(x)$, nous pouvons extraire à l'aide du théorème d'Ascoli, de la suite (γ_n) une sous-suite convergent vers une courbe γ reliant y à x tracée sur $\bar{V}$ et sur un plan parallèle à $N(x)$. De plus, γ étant une limite de courbes globalement convexes dont l'intégrale de courbure est majorée par $\frac{\pi}{2}$, est également globalement convexe d'intégrale de courbure majorée par $\frac{\pi}{2}$. Elle est donc de longueur inférieure strictement à $\mathrm{Inr}(x)$, et dès lors tracée sur V. Il nous reste alors simplement à montrer que la courbe γ est incluse dans O. Pour cela il suffit de montrer qu'elle est incluse dans W.

Dans le cas contraire, le lemme précédent nous assure que $K(\gamma)=\frac{\pi}{2}$, ce qui entraînerait que la droite tangente en y à γ est orthogonale à celle en x, et donc parallèle à $N(x)$, ce qui est impossible puisque y appartient à O.

L'ouvert O étant connexe, nous avons $I=O$. $\square$

Nous allons maintenant montrer que

$$N(O)=\{n\in S^{n-1}/\langle n, N(x)\rangle > 0\}.$$

Soit donc n un vecteur de ce dernier ensemble et y le minimum sur $\bar{O}$ de la fonction $f(y)=\langle y, n\rangle$.

Ce minimum existe bien puisque O est inclus d'après le lemme précédent dans la boule de centre x et de rayon $\mathrm{Inr}(x)$, et donc relativement compact.

On montre aisément de la même manière que dans le lemme précédent qu'il existe une courbe γ plane tracée sur $\bar{O}$ reliant x et y, de courbure inférieure à $\frac{\pi}{2}$ et de longueur strictement inférieure à $\mathrm{Inr}(x)$. En particulier γ est en fait tracée sur V.

Orientons γ dans le sens xy, et soit alors u le vecteur tangent en y à γ. Le point y étant le minimum de la fonction f sur γ, nous obtenons $\langle u, n\rangle \leqq 0$.

Ceci entraîne que u est différent de $N(x)$. L'intégrale de la courbure de γ est alors strictement inférieure à $\frac{\pi}{2}$ et donc d'après le lemme 4.1, y appartient à O.

Dès lors, $N(y)=n$. Ceci termine la preuve du théorème.

5. Démonstration des corollaires

Le corollaire 1 découle trivialement des définitions. Il ne nous reste donc plus qu'à fournir la démonstration du corollaire 2.

Preuve. Rappelons tout d'abord, l'inégalité de Bonnesen (cf. [0]), en utilisant les mêmes notations que dans l'introduction:

$$\operatorname{Inr}(V)\cdot L \geqq A(V)+\tfrac{1}{2}\operatorname{Inr}(V)^2(2\pi-K^+(V))$$

Dans notre cas particulier cela donne $A(V)\leqq \operatorname{Inr}(V)\, L(\delta V)$. De plus $\operatorname{Inr}(V)\leqq\sqrt{2}$, d'après le corollaire 1. $\square$

Références

[B1] Burago, Yu.D.: An estimate from below for the spatial diameter of a surface in terms of its intrinsic radius and curvature. Mat. Sbornik **86**(128), 405–414 (1971)

[B2] Burago, Yu.D.: Isoperimetric inequalities in the theory of surfaces of bounded external curvature. Seminars in Mathematics, V.A. Steklov Math. Inst., Leningrad, vol. 10, 1970

[G] Gromov, M.: Partial differential equations (à paraître)

[O] Osserman, R.: Bonnesen style isoperimetric inequalities. Am. Math. Mon. **86**, 1–29 (1976)

[S] Spivak, M.: A comprehensive introduction to differential geometry. Tome 4, Boston. Publish or Perish 1975

Reçu le 13 Août 1987